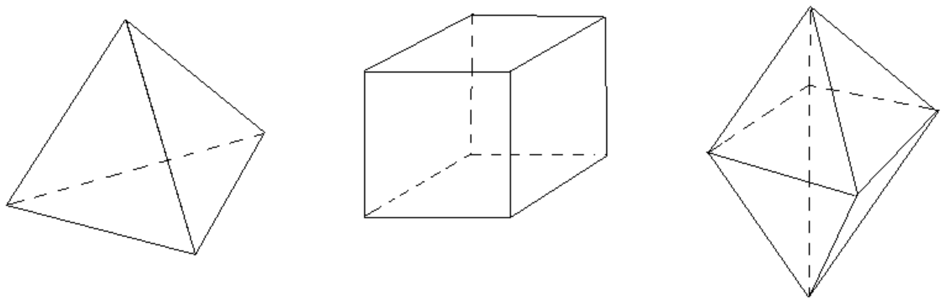
8 서울시립대학교 모의

✽ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

제 시 문

[문제 1]

모든 모서리의 길이가 1인 정사면체, 정육면체, 정팔면체가 있다. 한 모서리를 회전축으로 하여 각각의 정다면체를 회전시킬 때, 정다면체의 어떤 면 또는 단면을 회전시킨 것으로 보면 되는가? 자신의 주장에 대한 이유를 밝히고, 세 개의 회전체의 부피도 각각 구하시오.



[문제 2]

좌표평면에서 세 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1), \mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$이 원 $x^2+y^2=9$ 위에 있을 때, 다음 물음에 답하시오.

(a) 삼각형 ABC의 무게중심이 $(1, 0)$이면 삼각형 ABC가 직각삼각형임을 보이시오.

(b) 삼각형 ABC의 무게중심이 $(1, 0)$일 때, $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|y_1|+|y_2|+|y_3|$의 값의 범위에 대하여 논하시오.

(c) 삼각형 ABC의 무게중심이 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있으면 삼각형 ABC가 어떤 꼴의 삼각형인지 논하시오.

제시문 분석

1. 문제 1

문제 1에서는 정다각형의 한 축을 중심으로 회전한 회전체를 정의하고 있다.

2. 문제 2

문제 2에서는 삼각형의 무게중심과 원 위의 임의의 세 점에서 정의된 삼각형을 제시하고 있다.

논제 분석

[문제 1]

정다면체의 한 모서리를 축으로 회전시켰을 때, 그 모양을 예측하고 부피를 구할 수 있는지를 묻고 있다. 정다면체의 한 모서리를 회전축으로 정하고 회전시킨 도형의 모양은 실제로 그 도형이 품고 있는 넓이가 가장 큰 다각형의 한 모서리를 축으로 회전시킨 것과 같음을 묻고 있다.

[문제 2]

(1) 삼각형의 무게중심의 성질과 원에서 지름을 한 변으로 하고 호 위의 한 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 직각삼각형이 됨을 묻고 있다.

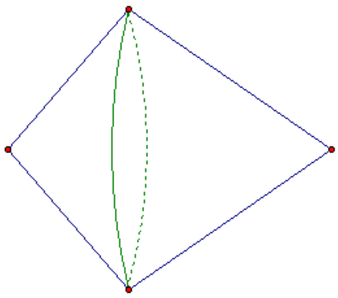
(2) 삼각함수의 합성 혹은 원에 접하는 직선의 최댓값을 묻고 있다.

(3) 삼각형이 회전이동하면 삼각형의 무게중심도 따라서 회전이동한다는 사실을 알고 있는지 묻고 있다.

배경지식 쌓기

1. 회전체의 부피

삼각형을 한 모서리를 중심축으로 회전시키면 원뿔 두 개를 엎어 놓은 모양이 되고 사각형을 회전시키면 원기둥이 된다.



2. 삼각형의 무게 중심

세 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$을 지나는 삼각형 무게중심은

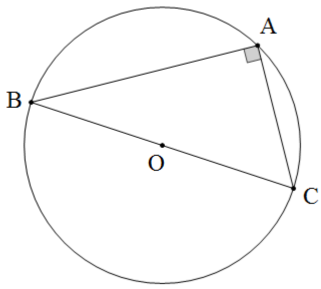
$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다

3. 삼각함수의 합성

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \text{ 단, } \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

4. 원에 내접하는 삼각형의 성질

원에 내접하는 삼각형이면서 한 변이 원의 지름을 지나면 그 삼각형은 직각삼각형이다.



풀어보기

1. 정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 다섯 종류 뿐임을 오일러의 공식을 이용하여 증명하시오.
   (참고) 오일러의 공식: 구와 연결 상태가 같은 도형에서 모서리의 개수를 e, 꼭짓점의 개수를 v, 면의 개수를 f라고 하면, $v-e+f=2$이다.

2. 정다면체에는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 다섯 종류가 있다. 이 중에서 꼭짓점 근처를 적당히 자르면 계속해서 정다면체를 만들 수 있다. 이런 과정을 정다면체의 순환이라고 한다. 정사면체에서 각 꼭짓점 근처를 규칙적으로 자르면 정팔면체, 정육면체에서는 정사면체, 정십이면체에서 정육면체를 만들 수 있다. 그 이유를 간략히 서술하시오.

3. 정육면체 ABCD$-$EFGH의 대각선 $\overline{\mathrm{AG}}$ 를 $1:2$로 내분하는 점 P 는 $\triangle$BDE 의 무게중심임을 증명하시오.

읽기 자료

오일러 표수(특성수 혹은 공식)15)

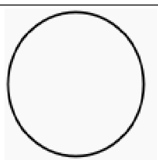
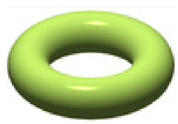
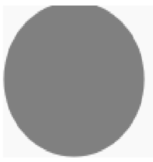
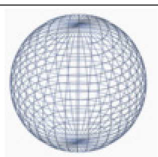
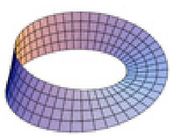
대수적 위상수학(algebraic topology) 혹은 다면체 조합론(Polyhedral combinatorics)에서 오일러 표수(Euler characteristic)란 위상기하학적 불변량으로서, 위상공간 속의 도형이나 구조가 구부러지는 것에 관계가 없는 값이다. 오일러-푸앵카레 표수(Euler-Poincaré characteristic)라고도 부르며, 보통 그리스 문자 x로 표기한다.

<그림 1> 오일러의 초상화

오일러 표수는 원래 다면체에서 정의되었고, 정다면체의 분류를 포함한 다양한 다면체의 정리에 관련하여 이용되었다. 이 개념을 이름 붙인 레온하르트 오일러는 이 개념의 초창기 업적에 공헌이 있고, 현대 수학에서는 호몰로지를 비롯한 다양한 개념과 연결되어 있다.

v를 꼭짓점, e를 모서리, f를 면의 수라고 할 때 오일러 표수x는 다음과 같다. $x=v-e+f$ 만약 구와 연결 상태가 같을 경우(homeomorphic) 오일러 표수의 값은 그 모양에 관계없이 항상 2가 된다.

우리는 흔히 점(꼭짓점)을 0차원 도형, 선분을 1차원 도형, 선분을 2차원, 입체를 3차원 도형이라고 부른다. 일반적으로 n차원 도형에서 k차원 도형의 개수를 a_k라고 하면, $a_0-a_1+a_2-\cdots+(-1)^{n+1}a_n=1$이라고 추측할 수 있다. 이것이 n차원에서 **일반화된 오일러 특성수 혹은 오일러 공식**이라고 할 수 있다.

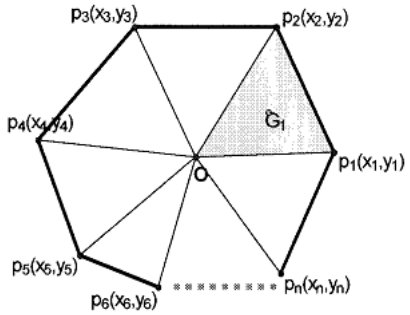
도형의 이름	그림	오일러 표수	도형의 이름	그림	오일러표수
원		0	토러스		2
원판		1	이중토러스		-2
구		2	뫼비우스 띠		0

15) 오일러의 초상화와 아래의 내용은 위키피디아에서 발췌.

무게중심을 확장하기[16)]

다각형의 무게중심을 구하려면 다각형을 삼각형으로 나누고 그 각각의 삼각형의 무게중심의 평균 위치를 구하면 된다. 이 때 삼각형은 큰 것과 작은 것이 있으므로 넓이를 가중치로 하는 가중평균을 구하면 된다.

다음 그림의 다각형 $p_1p_2 \cdots p_n$의 무게중심 좌표를 구하자.



삼각형 OP_1P_2에 대하여 넓이와 무게중심을 좌표를 통하여 구해 보면

넓이 $A_1 = \dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{2}$이고, 무게중심 $G_1 = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{3}, \dfrac{y_1 + y_2}{3}\right)$이다.

이와 같은 방법으로

삼각형 OP_iP_{i+1}에 대하여 넓이와 무게중심을 좌표를 통하여 구해 보면

$A_i = \dfrac{x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i}{2}$, $G_i = \left(\dfrac{x_i + x_{i+1}}{3}, \dfrac{y_i + y_{i+1}}{3}\right)$이고

$A_n = \dfrac{x_ny_1 - x_1y_n}{2}$, $G_n = \left(\dfrac{x_n + x_1}{3}, \dfrac{y_n + y_1}{3}\right)$이다.

무게중심의 위치벡터={(각 삼각형의 무게중심의 위치벡터)×(각 삼각형의 넓이)}/(다각형 전체 넓이)이므로

다각형 전체의 무게중심 G는 다각형 전체 넓이 $A(=\sum A_i)$를 사용하여 나타내면 다음과 같다. $G = \dfrac{\sum G_iA_i}{A}$이다.

16) 임채명의 "GSP를 이용한 볼록 n각형의 무게중심 작도"(석사 학위논문).

예시 답안

풀어보기 1

정다면체에서 꼭짓점의 개수를 V, 모서리의 개수를 E, 면의 개수를 F라 하자. 또 각각의 면을 구성하는 모서리의 개수를 p, 꼭짓점에 모이는 모서리의 개수를 q개라고 하자. 그러면 각각의 면에서 모서리는 두 번씩 계산되므로 $pF=2E$가 되고 같은 방법으로 각 모서리에는 꼭짓점이 2개씩 계산되므로 $qV=2E$이다. 이것을 오일러의 공식에 대입하면 다음의 결과를 얻는다.

$$2=V-E+F=\frac{2}{q}E-E+\frac{2}{p}E=\left(\frac{2}{q}-1+\frac{2}{p}\right)E$$

이다. 따라서 다음의 계산 결과를 얻을 수 있다.

$$E=\frac{2pq}{2p+2q-pq},\ V=\frac{4p}{2p+2q-pq},\ F=\frac{4q}{2p+2q-pq}$$

위의 식은 모두 자연수이므로 우리는 다음을 유추할 수 있다.

$2p+2q-pq>0$, 이 식의 양변에 -4를 더하면 $2p+2q-pq-4>-4$

다시 위의 식에 (-1)을 곱하고 인수분해 하면 다음 식을 구할 수 있다.

$$(p-2)(q-2)<4$$

그런데 p는 다각형을 구성하는 모서리(변)의 수이므로 3 이상이고, q는 다면체에서 한 꼭짓점에서 모이는 모서리 수이므로 3 이상이다. 따라서 가능한 경우의 수는 다음의 5 가지뿐이다.

$p=3,\ q=3$; 이 경우는 정사면체이다.

$p=4,\ q=3$; 이 경우는 정육면체이다.

$p=3,\ q=4$; 이 경우는 정팔면체이다.

$p=5,\ q=3$; 이 경우는 정십이면체이다.

$p=3,\ q=5$; 이 경우는 정이십면체이다.

(참고) 유클리드의 증명

일반적으로 입체도형을 만들기 위해서는 한 꼭짓점에 적어도 3개의 면이 모여야 한다. 왜냐하면 두 개의 면으로 입체를 만들 수 없기 때문이다. 그런데 한 꼭짓점에 모인 다각형의 내각의 합이 360° 보다 크면 볼록한 다면체를 만들 수 없다.

정n각형에서 한 내각의 크기는 $\frac{n-2}{n}\times 180^\circ$이고 한 꼭짓점에 이것이 3 개 이상 모여 있어야 하므로 $\frac{n-2}{n}180^\circ\times 3\le 360^\circ$인데 이것을 풀면 $n\le 6$이다. 즉, 정삼각형, 정사각형, 정오각형만이 정다면체의 한 면이 될 수 있고 정육각형 이상은 될 수 없다.

이제 정삼각형의 경우: 한 내각의 크기가 60° 이므로 한 꼭짓점에 모일 수 있는 정삼각형의 개수는 3 개, 4 개, 5 개이다. 3 개인 경우에는 정사면체, 4 개인 경우에는 정팔면체, 5 개인 경우에는 정이십면체가 된다.

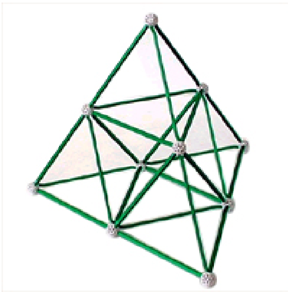
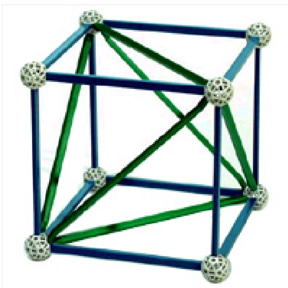
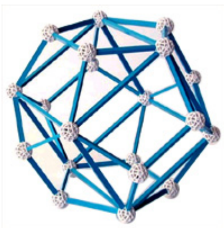
정사각형인 경우: 한 내각의 크기가 90° 이므로 한 꼭짓점에 모일 수 있는 정사각형의 개수는 3 개이고 이 경우 정육면체가 된다.

정오각형인 경우: 한 내각의 크기가 108° 이므로 한 꼭짓점에 모일 수 있는 정사각형의 개수는 3 개이고 이 경우 정십이면체가 된다.

참고로 이 증명 방법에는 직관적인 요소가 있다. 그래서 오일러는 위와 같은 증명을 하였다.

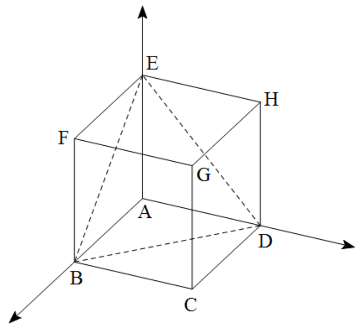
풀어보기 2

정다면체의 꼭짓점을 규칙적으로 잘라서 만드는 정다면체의 순환은 아래의 그림과 같이 만들 수 있다.

정다면체의 순환 구조	그림	방법
1. 정사면체에서 정팔면체 만들기		정사면체의 각 모서리의 중점을 연결하여 꼭짓점에서 생성되는 작은 정사면체(기존의 절반의 크기)를 잘라내면 왼쪽 그림과 같은 정팔면체를 만들 수 있다.
2. 정육면체에서 정사면체 만들기		정육면체의 각 면에 대각선을 왼쪽 그림과 같이 연결되게 그으면 6개의 선분을 가진 입체도형이 되는데 바로 정사면체이다. 따라서 면의 대각선 3개와 한 꼭짓점을 포함한 삼각뿔을 잘라내면 된다.
3. 정십이면체에서 정육면체 만들기		정십이면체의 면의 개수와 정육면체는 모서리의 개수가 서로 같으므로 정십이면체의 각 면 위에 선을 하나씩 그려 그 선이 모서리가 되도록 하면 정육면체를 만들 수 있다. 오른쪽 그림에서 지붕 모양을 하는 꼭짓점을 잘라내면 정육면체를 만들 수 있다.

풀어보기 3

오른쪽 그림과 같이 $A(0, 0, 0)$, $B(a, 0, 0)$, $C(a, a, 0)$, $D(0, a, 0)$, $E(0, 0, a)$, $F(a, 0, a)$, $G(a, a, a)$, $H(0, a, a)$로 좌표를 붙여주면 평면 BED의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$ 즉, $x+y+z=a$…①을 얻는다.



또 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AG}=(ka, ka, ka)$…②를 얻는다.

②를 ①에 대입하면 $3ka=a$, $\therefore k=\frac{1}{3}$

$\therefore$ 점 P는 $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$이다. 이것은 점 P가 $\triangle EBD$의 무게중심임을 의미한다.

문 제 1 [17)]

정사면체의 한 변을 회전축으로 하여 회전시키면 <그림 1> 아랫면 또는 윗면삼각형만 회전시켜 주면 된다. 왜냐하면 축과 만나고 있는 두 면 이외의 절단된 면은 이등변 삼각형으로 높이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$보다 작기 때문에 <그림 4> 한 변의 길이가 1인 정삼각형을 회전시킨 입체로 간주하면 된다.

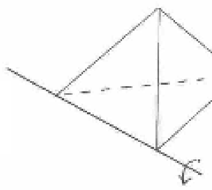
정육면체를 회전시킨 입체는 변의 길이가 1, $\sqrt{2}$인 직사각형을 길이 1인 변을 회전축으로 하여 회전시킨 입체로 간주할 수 있다. 왜냐하면 다른 절단면은 직사각형은 되지만 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$보다 작다는 것을 알 수 있다<그림 2>.

길이 1인 정팔면체를 회전시키면 한 변의 길이가 1인 정사각형을 회전시킨 입체로 볼 수 있다. 왜냐하면 다른 절단면은 등변사다리꼴로 윗변의 길이는 1보다 작고, 사다리꼴의 높이는 정삼각형의 높이 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 부터 정사각형의 높이 1까지 직선을 따라 증가하므로 <그림 5> 높이는 1보다 작게 된다. 정팔면체의 다른 변을 회전축으로 하여 회전시키면 정팔면체의 대칭성에 의하여 여전히 같은 입체가 나오게 된다.

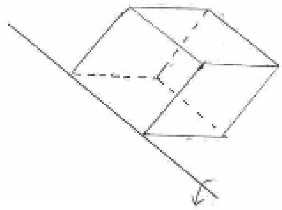
결론적으로 정사면체는 길이가 1인 정삼각형을 회전시킨 것이고, 정팔면체는 길이가 1인 정사각형을 회전시킨 것이고, 정육면체는 길이가 1, $\sqrt{2}$인 직사각형을 회전시킨 것이다.

정사면체 회전입체 부피는 원뿔 2개를 붙인 것으로 볼 수 있어서 $2\times\frac{1}{3}\left(\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$ 이고 정팔면체 회전입체 부피는 반지름과 높이가 1인 원기둥으로 부피가 π 가 된다. 정육면체 회전입체 부피는 반지름 $\sqrt{2}$, 높이가 1인 원기둥으로 부피가 2π 가 된다.

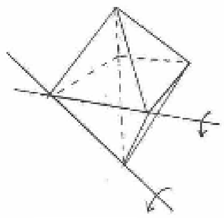
17) 서울시립대 예시답안



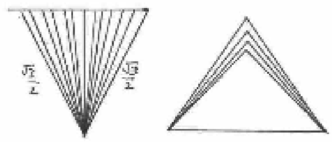
<그림 1>



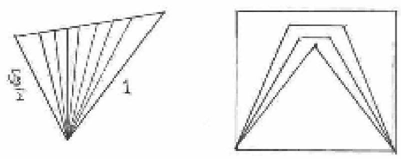
<그림 2>



<그림 3>



<그림 4>



<그림 5>

문 제 2-a

삼각형 ABC의 무게중심이 $(1, 0)$이므로 $x_1+x_2+x_3=3$, $y_1+y_2+y_3=0$이다.

따라서 다음이 성립한다.

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2=(3-x_3)^2+(-y_3)^2,$$

$$x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+y_1^2+y_2^2+2y_1y_2=9-6x_3+x_3^2+y_3^2,\quad x_1x_2+y_1y_2=-3x_3,$$

$$y_1y_2=-3x_3-x_1x_2=-3(3-x_1-x_2)-x_1x_2=-(3-x_1)(3-x_2)$$

[다른풀이 1]

같은 방법으로 $y_1y_3=-(3-x_1)(3-x_3)$, $y_2y_3=-(3-x_2)(3-x_3)$이므로

$$y_1^2y_2^2y_3^2=-(3-x_1)^2(3-x_2)^2(3-x_3)^2,\ y_1y_2y_3=(3-x_1)(3-x_2)(3-x_3)=0$$

이다. 따라서 $x_1=3$ 또는 $x_2=3$ 또는 $x_3=3$이다.

$x_1=3$이면 $y_1=0$이고 $x_2+x_3=0$, $y_2+y_3=0$이므로 $(x_2,y_2)=(-x_3,-y_3)$이다. 즉, $\mathrm{A}(3, 0)$이고 $\mathrm{B}(x_2, y_2)$이고 $\mathrm{C}(x_3, y_3)=(-x_2, -y_3)$이다. 그런데 점 B와 C는 원점에 대칭이므로 $\overline{\mathrm{BC}}$는 원점(중심)을 지나는 선분이므로 원 $x^2+y^2=9$의 지름이다. 같은 방법으로 $x_2=3$이면 선분 AC가 $x_3=3$이면 선분 AB가 원 $x^2+y^2=9$의 지름이므로 삼각형 ABC는 직각삼각형이다.

[다른풀이 2]

따라서 $(9-x_1^2)(9-x_2^2)=y_1^2y_2^2=(3-x_1)^2(3-x_2)^2$이므로 다음이 성립한다.

$$(3-x_1)(3+x_1)(3-x_2)(3+x_2)=(3-x_1)^2(3-x_2)^2$$
$$(3-x_1)(3-x_2)\{(3+x_1)(3+x_2)-(3-x_1)(3-x_2)\}=0$$
$$(3-x_1)(3-x_2)(3-x_3)=0$$

$x_1=3$이면 $y_1=0$이고 $x_2+x_3=0,\ y_2+y_3=0$이므로 $(x_2,y_2)=(-x_3,-y_3)$이다. 따라서 선분 BC가 원 $x^2+y^2=9$의 지름이다.

같은 방법으로 $x_2=3$이면 선분 AC가, $x_3=3$이면 선분 AB가 원 $x^2+y^2=9$의 지름이므로 삼각형 ABC는 직각삼각형이다.

문 제 2-b

$x_1=3$이면 $y_1=0$이고 $(x_2,y_2)=(-x_3,-y_3)$이므로 다음이 성립한다.

$$|x_1|+|x_2|+|x_3|+|y_1|+|y_2|+|y_3|=3+2(|x_2|+|y_2|)$$

[다른풀이 1] $x_2^2+y_2^2=9$이므로 $|x_2|=3\cos t,\ |y_2|=3\sin t\left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$|x_2|+|y_2|=3(\cos t+\sin t)=3\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

이므로 $|x_2|+|y_2|$의 값의 범위는 $[3,\ 3\sqrt{2}\,]$이다.

따라서 $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|y_1|+|y_2|+|y_3|$의 값의 범위는 $[9,\ 3+6\sqrt{2}\,]$이다.

$x_2=3$ 또는 $x_3=3$인 경우도 같은 방법으로 값의 범위는 $[9,\ 3+6\sqrt{2}\,]$이다.

[다른풀이 2] $x^2+y^2=9,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y=k$ 라 하자. 직선 $x+y=k$가 점 $(3,0)$을 지날 때 $x+y$는 최솟값 3, 직선 $x+y=k$가 $x^2+y^2=9$과 점 $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}},\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$에서 접할 때 최댓값 $3\sqrt{2}$을 갖는다.

따라서 $x+y$의 값의 범위는 $[3,\ 3\sqrt{2}\,]$이므로

$|x_1|+|x_2|+|x_3|+|y_1|+|y_2|+|y_3|$의 값의 범위는 $[9,\ 3+6\sqrt{2}\,]$이다.

$x_2=3$ 또는 $x_3=3$인 경우도 같은 방법으로 값의 범위는 $[9,\ 3+6\sqrt{2}\,]$이다.

문 제 2-c

삼각형 ABC의 무게중심을 $\mathrm{G}(a,b)$ $(a^2+b^2=1)$, $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{T}(1,0)$라 하고 $\angle\mathrm{GOT}=\theta$라고 하자. 또 세 점 A, B, C를 원점을 중심으로 시계 방향으로 각각 θ만큼 회전이동 시킨 점을 A′, B′, C′이라고 하자. 이때, 삼각형 A′B′C′의 무게중심이 $(1,0)$이므로 (1)에서 보인 바에 의하여 삼각형 A′B′C′는 직각삼각형이다. 그런데 삼각형 ABC와 삼각형 A′B′C′이 합동이므로 삼각형 ABC도 직각삼각형이다.