

확실하게 개념의 이해를 돕는 똑똑한 기본서

개념 ^{PLUS} 유형

BASIC

정답과 해설



01 집합의 포함 관계

개념 확인 문제

p. 8

1 $A \subset B$ 2 (1) 16개 (2) 15개 (3) 8개 (4) 12개

1

$A = \{10, 20, 30, \dots\}$, $B = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$
 $\therefore A \subset B$

2

- (1) $2^4 = 16$ (개)
 (2) $2^4 - 1 = 15$ (개)
 (3) $2^{4-1} = 2^3 = 8$ (개)
 (4) $2^4 - 2^{4-2} = 16 - 4 = 12$ (개)

유 제

pp. 8~11

001 ④ 002 ① 003 0 004 1 005 ⑤
 006 20 007 8 008 992개 009 16개 010 4개

001

집합 A의 원소는 $\emptyset$, a, {a}이므로

- ①, ② $a \in A$, $\{a\} \in A$ ($\therefore$ 참)
 ③ $\emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset A$ ($\therefore$ 참)
 ④ $\{\emptyset, a\}$ 는 집합 A의 부분집합이므로
 $\{\emptyset, a\} \subset A$ ($\therefore$ 거짓)
 ⑤ $\{a\}$ 는 집합 A의 부분집합이므로 $\{a\} \subset A$ ($\therefore$ 참)

002

$A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 1\}$ 이므로 집합 A의 원소 a와 집합 B의 원소 b를 더하여 만들 수 있는 수를 나열해 보면

$$0 + (-1) = -1, 1 + (-1) = 0, 2 + (-1) = 1$$

$$0 + 1 = 1, 1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3$$

따라서 집합 C는 $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

이므로 집합 C의 원소가 아닌 것은 ① -2이다.

003

$A \subset B$ 이므로 $a \in A$, $a+3 \in A$ 이면 $a \in B$, $a+3 \in B$

- (i) $a = -1$ 일 때, $a+3 = 2 \notin B$ 이므로 $A \not\subset B$
 (ii) $a = 0$ 일 때, $a+3 = 3 \in B$ 이므로 $A \subset B$

(iii) $a = 1$ 일 때, $a+3 = 4 \notin B$ 이므로 $A \not\subset B$

(iv) $a = 3$ 일 때, $a+3 = 6 \notin B$ 이므로 $A \not\subset B$

따라서 $A \subset B$ 를 만족하는 상수 a의 값은 0이다.

004

$A = B$ 이므로 $1 = x^2 + 2$, $3 = x$ 또는 $1 = x$, $3 = x^2 + 2$

(i) $1 = x^2 + 2$, $3 = x$ 일 때

$x = 3$ 을 $1 = x^2 + 2$ 에 대입하면 식이 성립하지 않는다.

(ii) $1 = x$, $3 = x^2 + 2$ 일 때

$x = 1$ 을 $3 = x^2 + 2$ 에 대입하면 식이 성립하므로 $x = 1$

따라서 (i), (ii)에서 구하는 상수 x의 값은 $x = 1$

005

세 집합 A, B, C를 원소나열법으로 나타내면

$$A = \{1, 2, 4, 8\}$$

$$B = \{x | x \text{는 } 8 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 4, 8\}$$

$$C = \{2^n | n \text{은 } 0 \text{ 또는 자연수}\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$$

$$\therefore A = B \subset C$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤ $C \subset A$ 이다.

006

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 에서

(i) 6의 양의 약수인 1, 2, 3, 6을 모두 포함하는 부분집합의 개수 a는 집합 A에서 원소 1, 2, 3, 6을 제외한 집합 $\{4, 12\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$a = 2^{6-4} = 2^2 = 4$$

(ii) 소수인 2, 3을 포함하지 않는 부분집합의 개수 b는 집합 A에서 원소 2, 3을 제외한 집합 $\{1, 4, 6, 12\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$b = 2^{6-2} = 2^4 = 16$$

따라서 (i), (ii)에서 $a + b = 4 + 16 = 20$

007

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서

(i) 원소 4를 포함하지 않는 부분 집합의 개수 x는 집합 A에서 4를 제외한 집합 $\{1, 2, 3, 5\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$x = 2^{5-1} = 16$$

(ii) 원소 1은 포함하고 2는 포함하지 않는 부분집합의 개수 y는 집합 A에서 1, 2를 제외한 집합 $\{3, 4, 5\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$y = 2^{5-1-1} = 2^3 = 8$$

따라서 (i), (ii)에서 $x - y = 16 - 8 = 8$

008

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이다.

따라서 집합 A 의 부분집합 중 적어도 한 개의 홀수를 포함하는 부분집합은 전체 부분집합에서 홀수를 한 개도 포함하지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로

$$2^{10} - 2^{10-5} = 2^{10} - 2^5 = 1024 - 32 = 992(\text{개})$$

009

$A \subset B \subset C$ 를 원소나열법으로 나타내면

$$\{e, f\} \subset B \subset \{a, b, c, d, e, f\}$$

이때 집합 B 의 개수는 집합 $\{a, b, c, d, e, f\}$ 의 부분집합 중 원소 e, f 를 반드시 포함하는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{6-2} = 2^4 = 16(\text{개})$$

010

$$B \cup X = B \text{에서 } X \subset B$$

$$(B - A) \cup X = X \text{에서 } (B - A) \subset X \text{ 이므로}$$

$$(B - A) \subset X \subset B$$

그런데 $B - A = \{1, 2, 3\}$ 이므로

$$\{1, 2, 3\} \subset X \subset B$$

즉, 집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분집합 중 원소 1, 2, 3을 반드시 포함하는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{5-3} = 2^2 = 4(\text{개})$$

02 집합의 연산

개념 확인 문제

p. 13

$$1(1) \{1, 2, 3, 5, 7, 9\} \quad (2) \{3, 5, 7\}$$

$$(3) \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad (4) \{1, 9\}$$

$$2(1) \{1, 2, 4, 5, 6\} \quad (2) \{6\}$$

1

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{2, 3, 5, 7\} \text{이므로}$$

$$(1) A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$$

$$(2) A \cap B = \{3, 5, 7\}$$

$$(3) A^c = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$(4) A - B = \{1, 9\}$$

2

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$A \cap B = \{3\}$ 이므로 드 모르간의 법칙에 의해

$$(1) A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

$$(2) A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{6\}$$

유 제

pp. 14~18

$$011 -3$$

$$012 12$$

$$013 5\text{개}$$

$$014 ②$$

$$015 ③$$

$$016 ①$$

$$017 ④$$

$$018 ③$$

$$019 12$$

$$020 12$$

$$021 ③$$

$$022 A=B$$

011

$$A \cap B = \{1, 3\} \text{이므로 } \{1, 3\} \subset A \text{에서 } 1 \in A, 3 \in A$$

$$3 \in A \text{에서 } a^2 - 6 = 3, a^2 = 9$$

$$\therefore a = 3 \text{ 또는 } a = -3$$

$$(i) a = 3 \text{일 때, } A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 7, 15\} \text{이므로}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$(ii) a = -3 \text{일 때, } A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 4\} \text{이므로}$$

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

따라서 구하는 상수 a 의 값은 -3 이다.

012

$$A \cap B = \{3\} \text{이므로 } \{3\} \subset A \text{에서 } 3 \in A$$

$$\therefore a^2 - 1 = 3, a^2 = 4 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 2$$

$$(i) a = -2 \text{일 때, } A = \{0, 3\}, B = \{-1, 0, 1\} \text{이므로}$$

$$A \cap B = \{0\}$$

$$(ii) a = 2 \text{일 때, } A = \{0, 3\}, B = \{3, 4, 5\} \text{이므로}$$

$$A \cap B = \{3\}$$

따라서 $a = 2$ 이고, $A \cup B = \{0, 3, 4, 5\}$ 이므로 집합 $A \cup B$

의 모든 원소의 합은 $0 + 3 + 4 + 5 = 12$

013

두 집합 A, B 가 서로소일 때, $A \cap B = \emptyset$ 이므로

$$\neg. A - B = A \quad (\therefore \text{참})$$

$$\neg. B - A = B \quad (\therefore \text{참})$$

$$\neg. A \cup B \neq A \quad (\therefore \text{거짓})$$

$$\neg. (A \cap B)^c = \emptyset^c = U \quad (\therefore \text{참})$$

$$\neg. B - A = B \text{이므로 } A \text{와 } B - A \text{는 서로소이다. } (\therefore \text{참})$$

$$\neg. A - B = A \text{이므로 } B \text{와 } A - B \text{는 서로소이다. } (\therefore \text{참})$$

따라서 옳은 것의 개수는 5개이다.

014

주어진 식의 좌변을 간단히 하면

$$(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A \cup B$$

$$A \cup (B \cap B^c) = A \cup B \quad \leftarrow \text{분배법칙}$$

$$A \cup \emptyset = A \cup B$$

$$A = A \cup B$$

즉, $A = A \cup B$ 이므로 $B \subset A$

따라서 보기 중 옳은 것은 ② $B \subset A$ 이다.

015

$$\begin{aligned} & [A \cap (A^c \cup B)] \cup [B \cap (B \cup A)] \\ &= [(A \cap A^c) \cup (A \cap B)] \cup B \quad \leftarrow \text{분배법칙} \\ &= [\emptyset \cup (A \cap B)] \cup B \\ &= (A \cap B) \cup B = B \end{aligned}$$

016

$$\begin{aligned} & (A - B) \cup (A - C) \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \quad \leftarrow \text{차집합의 성질} \\ &= A \cap (B^c \cup C^c) \quad \leftarrow \text{분배법칙} \\ &= A \cap (B \cap C)^c \quad \leftarrow \text{드 모르간의 법칙} \\ &= A - (B \cap C) \quad \leftarrow \text{차집합의 성질} \end{aligned}$$

017

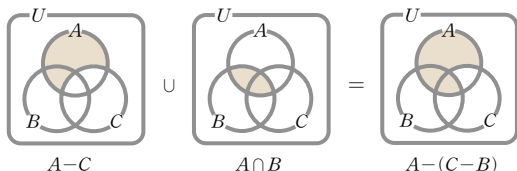
색칠한 부분은 C에서 $A \cup B$ 를 뺀 것과 같으므로 이 식을 변형하면

$$\begin{aligned} C - (A \cup B) &= C \cap (A \cup B)^c \quad \leftarrow \text{차집합의 성질} \\ &= C \cap (A^c \cap B^c) \quad \leftarrow \text{드 모르간의 법칙} \end{aligned}$$

018

$$\begin{aligned} A - (C - B) &= A \cap (C - B)^c \quad \leftarrow \text{차집합의 성질} \\ &= A \cap (C \cap B^c)^c \quad \leftarrow \text{차집합의 성질} \\ &= A \cap (C^c \cup B) \quad \leftarrow \text{드 모르간의 법칙} \\ &= (A \cap C^c) \cup (A \cap B) \quad \leftarrow \text{분배법칙} \\ &= (A - C) \cup (A \cap B) \quad \leftarrow \text{차집합의 성질} \end{aligned}$$

따라서 구하는 집합은 $A - C$ 와 $A \cap B$ 의 합집합과 같으므로 이를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



019

A_6, A_8, A_{12} 를 구하면

$$\begin{aligned} A_6 &= \{6, 12, 18, 24, \dots\}, A_8 = \{8, 16, 24, 32, \dots\} \\ A_{12} &= \{12, 24, 36, 48, \dots\} \end{aligned}$$

주어진 식을 변형하면

$$A_6 \cap (A_8 \cup A_{12}) = (A_6 \cap A_8) \cup (A_6 \cap A_{12}) \quad \dots \textcircled{7}$$

$A_6 \cap A_8, A_6 \cap A_{12}$ 를 구하면

$$A_6 \cap A_8 = \{24, 48, 72, \dots\} = A_{24}$$

$$A_6 \cap A_{12} = \{12, 24, 36, \dots\} = A_{12}$$

이를 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned} A_6 \cap (A_8 \cup A_{12}) &= A_{24} \cup A_{12} \\ &= \{24, 48, \dots\} \cup \{12, 24, 36, \dots\} \\ &= \{12, 24, 36, 48, \dots\} \\ &= A_{12} \end{aligned}$$

따라서 $A_m = A_{12}$ 이므로 $m = 12$

| 다른 풀이 |

$$A_6 \cap (A_8 \cup A_{12}) = (A_6 \cap A_8) \cup (A_6 \cap A_{12}) \quad \dots \textcircled{8}$$

$A_6 \cap A_8$ 은 6과 8의 최소공배수인 24의 배수의 집합이므로

$$A_6 \cap A_8 = A_{24}$$

$A_6 \cap A_{12}$ 는 6과 12의 최소공배수인 12의 배수의 집합이므로

$$A_6 \cap A_{12} = A_{12}$$

$A_{24} \cup A_{12}$ 에서 24는 12의 배수이므로 $A_{24} \cup A_{12} = A_{12}$

⑧에 의해 $A_6 \cap (A_8 \cup A_{12}) = A_{24} \cup A_{12} = A_{12}$

따라서 $A_m = A_{12}$ 이므로 $m = 12$

020

A_4, A_6 을 구하면

$$A_4 = \{4, 8, 12, 16, 20, \dots\}$$

$$A_6 = \{6, 12, 18, 24, 30, \dots\}$$

이때 $A_4 \cap A_6$ 을 구하면

$$A_4 \cap A_6 = \{12, 24, 36, \dots\} = A_{12}$$

$$\therefore A_k \subset (A_4 \cap A_6) \iff A_k \subset A_{12}$$

이때 $A_k = \{k, 2k, 3k, 4k, \dots\}$ 이므로

$A_k \subset A_{12}$ 를 만족하려면 k 는 12의 배수이어야 한다.

따라서 구하는 k 의 최솟값은 12이다.

| 다른 풀이 |

$A_4 \cap A_6$ 는 4와 6의 최소공배수인 12의 배수의 집합이므로

$$A_4 \cap A_6 = A_{12} \quad \therefore A_k \subset A_{12}$$

즉, A_k 는 A_{12} 의 부분집합이므로 k 는 12의 배수이다.

따라서 구하는 k 의 최솟값은 12이다.

021

$$A * B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B) \text{이므로}$$

$$\textcircled{1} A * U = (A \cup U) - (A \cap U) = U - A = A^c (\therefore \text{참})$$

$$\textcircled{2} A * \emptyset = (A \cup \emptyset) - (A \cap \emptyset) = A - \emptyset = A (\therefore \text{참})$$

$$\textcircled{3} A * A^c = (A \cup A^c) - (A \cap A^c) = U - \emptyset = U (\therefore \text{거짓})$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} A * B &= (A \cup B) - (A \cap B) = (B \cup A) - (B \cap A) \\ &= B * A (\therefore \text{참}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ⑤ \quad A^c * B^c &= (A^c \cup B^c) - (A^c \cap B^c) \\
 &= (A \cap B)^c - (A \cup B)^c \\
 &= (A \cap B)^c \cap [(A \cup B)^c]^c \\
 &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\
 &= (A \cup B) - (A \cap B) \\
 &= A * B \quad (\because \text{참})
 \end{aligned}$$

022

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \emptyset \text{에서}$$

$$A - B = \emptyset \text{이고 } B - A = \emptyset$$

$$A - B = \emptyset \text{에서 } A \subset B$$

$$B - A = \emptyset \text{에서 } B \subset A$$

따라서 $A \subset B$, $B \subset A$ 를 만족하는 두 집합 A, B의 포함 관계는 $A = B$

03 유한집합의 원소의 개수

개념 확인 문제

p. 19

1 (1) 13 (2) 3

2 (1) 3 (2) 5

1

$$(1) \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ = 8 + 7 - 2 = 13$$

$$(2) \quad n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ = 13 + 10 - 20 = 3$$

2

$$(1) \quad n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 6 - 3 = 3$$

$$(2) \quad n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 8 - 3 = 5$$

유 제

pp. 20~22

023 91

028 ㉔

024 14

029 175

025 16

026 ④

027 5명

023

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 n(A \cup B) &= n(U) - n[(A \cup B)^c] \\
 &= n(U) - n(A^c \cap B^c) \\
 &= 80 - 17 = 63
 \end{aligned}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$63 = n(A) + n(B) - 28$$

$$\therefore n(A) + n(B) = 91$$

| 다른 풀이 |

주어진 조건을 이용하여 오른쪽 그림과 같이 영역을 네 부분으로 나누고

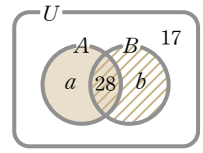
$$n(A - B) = a, n(B - A) = b \text{라 하면}$$

$$n(U) = a + b + 28 + 17 = 80$$

$$\therefore a + b = 35$$

$$\therefore n(A) + n(B) = (a + 28) + (b + 28)$$

$$= a + b + 56 = 35 + 56 = 91$$



024

$$n(B) = n(U) - n(B^c) \text{에서}$$

$$n(B) = 50 - 26 = 24$$

$$\text{또, } A^c \cap B = B \cap A^c = B - A \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 n(A^c \cap B) &= n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) \\
 &= 24 - 10 = 14
 \end{aligned}$$

| 다른 풀이 |

주어진 조건을 이용하여 오른쪽 그림과 같이 영역을 네 부분으로 나누고

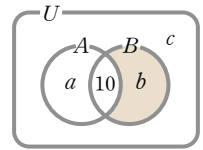
$$n(A - B) = a, n(B - A) = b,$$

$$n(A^c \cap B^c) = c \text{라 하면}$$

$$n(B^c) = a + c = 26$$

$$n(U) = a + b + c + 10 = 50$$

$$\therefore n(A^c \cap B) = n(B - A) = b = 14$$



025

$$A \cap C = \emptyset \text{이므로 } A \cap B \cap C = \emptyset$$

$$\therefore n(A \cap C) = 0, n(A \cap B \cap C) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\therefore n(A \cup B \cup C)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C)$$

$$- n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)$$

$$+ n(A \cap B \cap C)$$

$$= 7 + 8 + 6 - 2 - 3 - 0 + 0 (\because \textcircled{7})$$

$$= 16$$

| 다른 풀이 |

주어진 조건을 이용하여 오른쪽 그림과 같이 영역을 여섯 부분으로 나누고

$$n(A - B) = a, n\{B - (A \cup C)\} = b,$$

$$n(C - B) = c \text{라 하면}$$

$$n(A) = a + 2 = 7$$

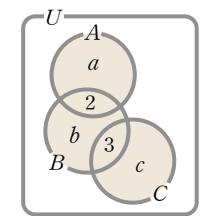
$$n(B) = b + 2 + 3 = 8$$

$$n(C) = c + 3 = 6$$

$$\therefore a = 5, b = 3, c = 3$$

$$\therefore n(A \cup B \cup C) = a + b + c + 2 + 3$$

$$= 5 + 3 + 3 + 2 + 3 = 16$$



026

학생 전체의 집합을 U , a문제를 푼 학생의 집합을 A , b문제를 푼 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U)=60, n(A)=35, n(B)=28$$

또, a문제와 b문제를 모두 풀지 못한 학생의 집합은 $A^c \cap B^c$ 이므로 $n(A^c \cap B^c)=5$

이때 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(U) - n\{(A \cup B)^c\} \\ &= n(U) - n(A^c \cap B^c) \\ &= 60 - 5 = 55 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 35 + 28 - 55 = 8 \end{aligned}$$

a문제만 푼 학생의 집합은 $A - B$ 이므로

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 35 - 8 = 27$$

b문제만 푼 학생의 집합은 $B - A$ 이므로

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 28 - 8 = 20$$

따라서 a, b 두 문제 중 한 문제만 푼 학생 수는

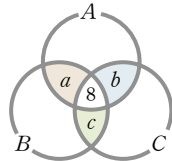
$$27 + 20 = 47(\text{명})$$

027

가군 대학에 지원한 학생의 집합을 A , 나군 대학에 지원한 학생의 집합을 B , 다군 대학에 지원한 학생의 집합을 C 라 하면

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= 50, n(A) = 19, n(B) = 25, \\ n(C) &= 27, n(A \cap B \cap C) = 8 \end{aligned}$$

이고, 세 집합의 관계를 오른쪽 벤 다이어그램과 같이 나타내면 두 개 군의 대학에만 지원한 학생 수는 $a+b+c$ 이다.



$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

에서

$$50 = 19 + 25 + 27 - (a + 8) - (c + 8) - (b + 8) + 8$$

$$50 = 55 - (a + b + c)$$

$$\therefore a + b + c = 5$$

따라서 구하는 학생 수는 5명이다.

028

$n(A)=34, n(B)=29$ 이므로 $n(A)=34 > 29=n(B)$ 에서 $B \subset A$ 일 때 $n(A \cup B)$ 의 최솟값은 34이고, 전체 학생 수는 50명을 넘을 수 없으므로 $n(A \cup B)$ 의 최댓값은 50이다.

$$\therefore 34 \leq n(A \cup B) \leq 50 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또, 농구와 야구를 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이고

그 수는 x 이므로 $x = n(A \cap B)$

이때 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 이므로 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$34 \leq n(A) + n(B) - n(A \cap B) \leq 50$$

$$34 \leq 34 + 29 - x \leq 50 \quad \therefore 13 \leq x \leq 29$$

따라서 x 의 최댓값과 최솟값의 합은 $29 + 13 = 42$

029

쿠폰 P, Q를 이용하여 선물을 받아간 사람의 집합을 각각 A, B 라 하면 $n(A)=62, n(B)=75$

이때 선물을 하나라도 받아간 사람의 집합은 $A \cup B$ 이고 $n(A)=62 < 75=n(B)$ 에서 $A \subset B$ 일 때 $n(A \cup B)$ 의 최솟값은 75이다.

또, 선착순 100명에게 선물을 주므로 선물을 받는 사람 수는 100명을 넘을 수 없으므로 $n(A \cup B)$ 의 최댓값은 100이다.

$$\therefore 75 \leq n(A \cup B) \leq 100$$

$$\therefore x + y = 100 + 75 = 175$$

소단원 연습문제

pp. 23~25

001 ④	002 ①	003 ③	004 ②	005 24개
006 ③	007 ①	008 8	009 ③	010 ④
011 ③	012 ②			

001

집합 A 의 원소는 1, 2, {1}, {2}이므로

①, ② $1 \in A, \{1\} \in A$ ($\therefore$ 참)

③ {2}는 집합 A 의 부분집합이므로 $\{2\} \subset A$ ($\therefore$ 참)

④, ⑤ {1, 2}는 집합 A 의 부분집합이므로 $\{1, 2\} \subset A$

따라서 ④는 거짓, ⑤는 참이다.

002

집합 $C = \{x+y | x \in A, y \in B\}$ 를 구하기 위해 $x+y$ 의 값을 표를 이용하여 구해 보면

$x \backslash y$	-2	-1	0	1	2
0	-2	-1	0	1	2
1	-1	0	1	2	3
2	0	1	2	3	4
3	1	2	3	4	5

$$\therefore C = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

ㄱ. $A \cap B = \{0, 1, 2\}$ 이므로 $(A \cap B) \subset C$ ($\therefore$ 참)

ㄴ. $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 이므로

$$C \not\subset (A \cup B) \quad (\therefore \text{거짓})$$

$$\begin{aligned} \therefore (C-A) \cap (C-B) &= \{-2, -1, 4, 5\} \cap \{3, 4, 5\} \\ &= \{4, 5\} \neq \emptyset (\therefore \text{거짓}) \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

003

집합 $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$ 는 집합 A 의 부분집합들의 집합
이므로

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

- ① $\emptyset$ 은 집합 $P(A)$ 의 원소이므로 $\emptyset \in P(A)$ ($\therefore$ 참)
- ② $\emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset P(A)$ ($\therefore$ 참)
- ③ $\{1\}$ 은 집합 $P(A)$ 의 원소이므로 $\{1\} \in P(A)$ ($\therefore$ 거짓)
- ④ $\{1, 2\}$ 는 집합 $P(A)$ 의 원소이므로
 $\{1, 2\} \in P(A)$ ($\therefore$ 참)
- ⑤ $\{A\} = \{\{1, 2\}\}$ 는 집합 $P(A)$ 의 부분집합이므로
 $\{A\} \subset P(A)$ ($\therefore$ 참)

004

$$(A \cap X) \cup (B \cap X) = X \text{에서} \quad (A \cup B) \cap X = X$$

$$\therefore X \subset (A \cup B) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(A \cup X) \cap (B \cup X) = X \text{에서} \quad (A \cap B) \cup X = X$$

$$\therefore (A \cap B) \subset X \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서} \quad (A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$$

그런데 $A \cap B = \{2, 3, 4\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로
 $\{2, 3, 4\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

이때 집합 X 는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중에서 원
소 2, 3, 4를 반드시 포함하는 부분집합이다.

따라서 구하는 집합 X 의 개수는 $2^{5-3} = 2^2 = 4(\text{개})$

005

$X \subset A$, $n(B \cap X) = 1$ 이므로 집합 X 는 집합 A 의 부분집
합 중 집합 $B = \{4, 5, 6\}$ 의 원소를 하나만 포함하고 나머지
들은 포함하지 않는 집합이다. 즉, 집합 X 가

(i) 4를 포함하고 5, 6을 포함하지 않는 경우 : $2^{6-1-2} = 2^3 = 8$

(ii) 5를 포함하고 4, 6을 포함하지 않는 경우 : $2^{6-1-2} = 2^3 = 8$

(iii) 6을 포함하고 4, 5를 포함하지 않는 경우 : $2^{6-1-2} = 2^3 = 8$

따라서 (i), (ii), (iii)에서 구하는 집합 X 의 개수는

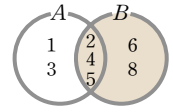
$$8 \times 3 = 24(\text{개})$$

006

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c &< \text{드 모르간의 법칙} \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) &< \text{차집합의 성질} \\ &= (A - B) \cup (B - A) &< \text{대칭차집합의 성질} \\ &= \{1, 3, 6, 8\} \end{aligned}$$

이때 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고 $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$ 이
므로 $A - B = \{1, 3\}$, $B - A = \{6, 8\}$

이고, 이를 벤 다이어그램으로 나타내면
오른쪽 그림과 같다.



따라서 $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$ 이므로 집합
 B 의 모든 원소의 합은

$$2 + 4 + 5 + 6 + 8 = 25$$

007

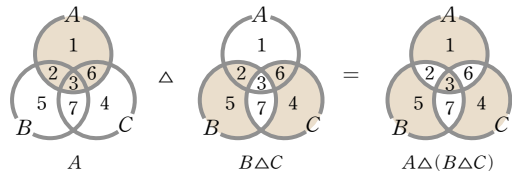
$$\begin{aligned} A \cap (B - C) &= A \cap ((^c B) \cap C^c) &< \text{차집합의 성질} \\ &= \emptyset \cup (A \cap B \cap C^c) &< A \cup \emptyset = A \\ &= ((^c A) \cap B \cap A^c) \cup (A \cap B \cap C^c) &< A \cap A^c = \emptyset \\ &= ((A \cap B) \cap A^c) \cup ((A \cap B) \cap C^c) &< \text{결합법칙} \\ &= (A \cap B) \cap (A^c \cup C^c) &< \text{분배법칙} \\ &= (A \cap B) \cap ((^c A) \cap C)^c &< \text{드 모르간의 법칙} \\ &= (A \cap B) - (A \cap C) &< \text{차집합의 성질} \end{aligned}$$

008

$$\begin{aligned} A^c \cap B^c &= (A \cup B)^c \text{이므로} \\ n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) \\ &= n(U) - n(A^c \cap B^c) = 30 - 5 = 25 \\ n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서} \\ 25 &= 15 + 17 - n(A \cap B) \\ \therefore n(A \cap B) &= 7 \\ \therefore n(A \cap B^c) &= n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \\ &= 15 - 7 = 8 \end{aligned}$$

009

$X \triangle Y = (X \cup Y) - (X \cap Y) = (X - Y) \cup (Y - X)$
이므로 벤 다이어그램을 이용하여 집합 $A \triangle (B \triangle C)$ 를 구해
보면 다음과 같다.



따라서 $A \triangle (B \triangle C) = \{1, 3, 4, 5\}$ 이므로 구하는 모든 원소
의 합은 $1 + 3 + 4 + 5 = 13$

010

주어진 식을 변형하면

$$A_2 \cap (A_3 \cup A_4) = (A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4) = A_6 \cup A_4$$

이때 A_6 은 6의 배수 중 두 자리의 자연수의 집합이므로 A_6 의 원소를 6l(l은 자연수)이라 하면

$10 \leq 6l \leq 99$ 에서

$$2 \leq l \leq 16 \quad \therefore n(A_6) = 15$$

또, A_4 는 4의 배수 중 두 자리의 자연수의 집합이므로 A_4 의 원소를 4m(m은 자연수)이라 하면

$10 \leq 4m \leq 99$ 에서

$$3 \leq m \leq 24 \quad \therefore n(A_4) = 22$$

한편, $A_6 \cap A_4 = A_{12}$ 에서 A_{12} 는 12의 배수 중 두 자리의 자연수의 집합이므로 A_{12} 의 원소를 12s(s는 자연수)라 하면

$10 \leq 12s \leq 99$ 에서

$$1 \leq s \leq 8 \quad \therefore n(A_{12}) = 8$$

따라서 구하는 집합의 원소의 개수는 집합 $A_6 \cup A_4$ 의 원소의 개수와 같으므로

$$\begin{aligned} n(A_6 \cup A_4) &= n(A_6) + n(A_4) - n(A_{12}) \\ &= 15 + 22 - 8 = 29 \end{aligned}$$

011

준비물 a, b, c를 가져오지 않은 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$$n(A) = 6, n(B) = 7, n(C) = 8$$

$$n(A \cap B) = 3, n(B \cap C) = 2, n(A \cap C) = 3$$

$$n(A \cap B \cap C) = 2$$

이때 적어도 한 가지의 준비물을 가져오지 않은 학생의 집합은 $A \cup B \cup C$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \\ &= 6 + 7 + 8 - 3 - 2 - 3 + 2 = 15 \end{aligned}$$

준비물 a, b, c를 모두 가져온 학생의 집합은 $(A \cup B \cup C)^c$ 이므로

$$\begin{aligned} n\{(A \cup B \cup C)^c\} &= n(U) - n(A \cup B \cup C) \\ &= 35 - 15 = 20 \end{aligned}$$

따라서 준비물 a, b, c를 모두 가져온 학생 수는 20명이다.

012

책 A, B, C를 읽은 학생들의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$$\begin{aligned} n(A) &= 5, n(B) = 4, n(C) = 7, n(A \cap B) = 3, \\ n(A \cap B \cap C) &= 2 \end{aligned}$$

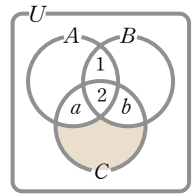
C만 읽은 학생 수가 가장 적을 때는 책 A와 C, 책 B와 C를 모두 읽은 학생 수가 가장 많을 때이다.

따라서 오른쪽 벤 다이어그램과 같이 나타내면 a와 b의 최댓값은

$$a = 5 - 1 - 2 = 2, b = 4 - 1 - 2 = 1$$

따라서 C만 읽은 학생 수의 최솟값은

$$7 - 2 - 2 - 1 = 2(\text{명})$$



04 명제의 뜻

유 제

pp. 28~31

030 ①	031 ②	032 ㄱ, ㄷ	033 -1	034 ④
035 $\frac{3}{2}$	036 역, 이, 대우	037 ③	038 ④	
039 (가) 홀수 (나) 홀수 (다) $(2k+1)(2l+1)$ (라) $2kl+k+l$				
040 ①				

030

① $x=y$ 이므로 $x^2+y^2=x^2+x^2=2x^2$, $2xy=2x \cdot x=2x^2$
 $\therefore x^2+y^2=2xy$ ($\therefore$ 참)

② [반례] 2는 소수이지만 짝수이다. ($\therefore$ 거짓)

③ [반례] $x=-3$, $y=2$ 이면 $(-3)^2 > 2^2$ 이지만 $-3 < 2$
 $(\therefore$ 거짓)

④ [반례] $x=-2$, $y=2$ 이면 $|-2|=|2|$ 이지만 $-2 \neq 2$
 $(\therefore$ 거짓)

⑤ [반례] $x=6$ 이면 6은 3의 배수이지만 $6+1=7$ 은 홀수이다. ($\therefore$ 거짓)

031

ㄱ. [반례] $x=0.\dot{9}$ 이면 $0.\dot{9}$ 는 무한소수이지만 $0.\dot{9}=1$ 이므로
 무리수가 아니다. ($\therefore$ 거짓)

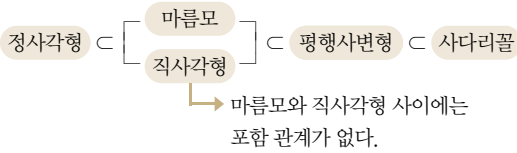
ㄴ. [반례] $c < 0$ 일 때, $a > b$ 이면 $ac < bc$ 이다. ($\therefore$ 거짓)

ㄷ. [반례] $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ 이면 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 은 정수이지만

a, b는 정수가 아니다. ($\therefore$ 거짓)

ㄹ. {정사각형} $\subset$ {마름모} $\subset$ {평행사변형} $\subset$ {사다리꼴} ($\therefore$ 참)
 따라서 보기 중 참인 명제의 개수는 1개이다.

TIP 사각형의 포함 관계



032

ㄱ. $x^2 - 2x + 1 = 0$ 의 해는 $x=1$ 이고 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 은 $x=1$ 일 때 성립하므로 어떤 x 에 대하여 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 은 성립한다. ($\therefore$ 참)

ㄴ. $x=0$ 일 때, $x^2=0$ 이므로 모든 x 에 대하여 $x^2 > 0$ 이 성립하지 않는다. ($\therefore$ 거짓)

ㄷ. $x^2 - x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ 이므로 모든 x 에 대하여 $x^2 - x + 1 > 0$ 이 성립한다. ($\therefore$ 참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

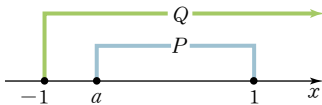
033

조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ ㉠

조건 p 에서 $P = \{x | a \leq x \leq 1\}$

조건 q 에서 $Q = \{x | x \geq -1\}$

두 집합 P, Q 가 ㉠을 만족하도록 수직선 위에 나타내면



$$\therefore -1 \leq a \leq 1$$

따라서 상수 a 의 최솟값은 -1 이다.

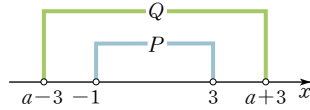
034

주어진 명제의 가정을 p , 결론을 q 라 하고, 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ ㉠

조건 p 에서 $P = \{x | -1 < x < 3\}$

조건 q 에서 $Q = \{x | a - 3 < x < a + 3\}$

두 집합 P, Q 가 ㉠을 만족하도록 수직선 위에 나타내면



$$\therefore a - 3 \leq -1, 3 \leq a + 3 \quad \therefore 0 \leq a \leq 2$$

035

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면 $\sim p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P^c \subset Q$ ㉠

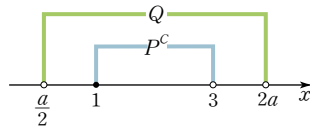
조건 p 에서 $P = \{x | x < 1 \text{ 또는 } x \geq 3\}$

$\therefore P^c = \{x | 1 \leq x < 3\}$

조건 $q : a - x < x < 4a - x$ 에서 $\frac{a}{2} < x < 2a$ 이므로

$$Q = \left\{x \mid \frac{a}{2} < x < 2a\right\}$$

두 집합 P, Q 가 ㉠을 만족하도록 수직선 위에 나타내면



$$\therefore \frac{a}{2} < 1, 3 \leq 2a \quad \therefore \frac{3}{2} \leq a < 2$$

따라서 구하는 실수 a 의 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

036

[역] n 이 홀수이면 n^2 이 홀수이다.
 $n = 2k + 1 (k = 0, 1, 2, \dots)$ 이라 하면
 $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
 이므로 n^2 은 홀수이다. ($\therefore$ 참)

역이 참이므로 이도 참이다.

[대우] n 이 짝수이면 n^2 이 짝수이다.
 $n = 2k (k = 1, 2, 3, \dots)$ 라 하면
 $n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$ 이므로 n^2 은 짝수이다. ($\therefore$ 참)

따라서 주어진 명제의 역, 이, 대우는 모두 참이다.

037

주어진 명제의 역을 각각 구해 보면 다음과 같다.

① [역] $a^2 = b^2$ 이면 $a = b$ 이다.

[반례] $a = -2, b = 2$ 이면 $(-2)^2 = 2^2$ 이지만 $-2 \neq 2$ ($\therefore$ 거짓)

② [역] $ac > bc$ 이면 $a > b$ 이다.

[반례] $a = 1, b = 3, c = -1$ 이면 $1 \cdot (-1) > 3 \cdot (-1)$ 이지만 $1 < 3$ ($\therefore$ 거짓)

- ③ [역] $a+c=b+c$ 이면 $a=b$ 이다.
양변에서 같은 수 c 를 빼도 등식은 성립한다. ($\therefore$ 참)
- ④ [역] $a+b>0$ 이면 $a>0$ 이고 $b>0$ 이다.
[반례] $a=2, b=-1$ 이면 $2+(-1)>0$ 이지만 $2>0, -1<0$ ($\therefore$ 거짓)
- ⑤ [역] a 가 4의 약수이면 a 는 2의 약수이다.
[반례] $a=4$ 이면 4는 4의 약수이지만 2의 약수는 아니다.
($\therefore$ 거짓)
- 따라서 그 역이 참인 명제는 ③이다.

038

「 $a+b+c<0$ 」의 부정은 「 $a+b+c\geq 0$ 」
「적어도 하나는 $\sim$ 이다.」의 부정은 「모두 $\sim$ 아니다.」
따라서 「 a, b, c 중 적어도 하나는 음수이다.」의 부정은
「 a, b, c 는 모두 음수가 아니다.」
따라서 주어진 명제의 대우는
「 a, b, c 가 모두 음수가 아니면 $a+b+c\geq 0$ 이다.」

039

주어진 명제의 대우는
「자연수 m, n 에 대하여 m, n 이 모두 $\boxed{\text{홀수}}$ 이면 mn 은 $\boxed{\text{홀수}}$ 이다.」
 m, n 이 모두 $\boxed{\text{홀수}}$ 이면
 $m=2k+1, n=2l+1$ (단, k 와 l 은 음이 아닌 정수)
로 놓을 수 있으므로
 $mn=\boxed{(2k+1)(2l+1)}=4kl+2k+2l+1$
 $=2(\boxed{2kl+k+l})+1$
여기서 $\boxed{2kl+k+l}$ 은 음이 아닌 정수이므로 mn 은 홀수이다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

040

a, b, c 가 $\boxed{\text{모두 홀수}}$ 라고 가정하면 a^2, b^2, c^2 은 (홀수)²의 꼴이므로 모두 홀수이다.
그런데 a^2+b^2 은 (홀수)+(홀수)의 꼴이므로 $\boxed{\text{짝수}}$ 이고, c^2 은 $\boxed{\text{홀수}}$ 이므로 $a^2+b^2\neq c^2$ 이 되어 가정에 모순이다.
따라서 $a^2+b^2=c^2$ 이면 a, b, c 중 적어도 하나는 짝수이다.

05 필요조건과 충분조건

개념 확인 문제

p. 32

1 6, 12, 18, 24, ..., 3, 6, 9, 12, ..., $\bigcirc$, $\subset$, 충분, 필요

1

$P=\{6, 12, 18, 24, \dots\}, Q=\{3, 6, 9, 12, \dots\}$

$\Rightarrow p \xrightarrow{\text{참}} q$ 또는 $P \subset Q$

$\Rightarrow p$ 는 q 이기 위한 **충분** 조건, q 는 p 이기 위한 **필요** 조건이다.

유 제

pp. 33~35

041 ⑤	042 충분, 필요	043 ⑤	044 ③
045 ③	046 $0\leq a<2$	047 4	048 6

041

세 개의 참인 명제

$p\Rightarrow q \dots \text{㉠}, s\Rightarrow \sim q \dots \text{㉡}, \sim p\Rightarrow r \dots \text{㉢}$

에 대하여 그 대우도 참이므로

$\sim q\Rightarrow \sim p \dots \text{㉣}, q\Rightarrow \sim s \dots \text{㉤}, \sim r\Rightarrow p \dots \text{㉥}$

① 명제 ㉠, ㉣에서 삼단논법에 의해

$p\Rightarrow q$ 이고 $q\Rightarrow \sim s$ 이므로 $p\Rightarrow \sim s$ ($\therefore$ 참)

② 명제 ㉣에서 $q\Rightarrow \sim s$ ($\therefore$ 참)

③ ①의 $p\Rightarrow \sim s$ 의 대우도 참이므로 $s\Rightarrow \sim p$ ($\therefore$ 참)

④ 명제 ㉤, ㉢에서 삼단논법에 의해

$\sim r\Rightarrow p$ 이고 $p\Rightarrow q$ 이므로 $\sim r\Rightarrow q$ ($\therefore$ 참)

따라서 반드시 참이라 할 수 없는 것은 ⑤이다.

042

$\sim p$ 는 q 의 필요조건이므로 $q\Rightarrow \sim p \therefore p\Rightarrow \sim q$

$\sim r$ 는 q 의 충분조건이므로 $\sim r\Rightarrow q \therefore \sim q\Rightarrow r$

r 는 s 의 충분조건이므로 $r\Rightarrow s \therefore \sim s\Rightarrow \sim r$

삼단논법에 의해 $p\Rightarrow \sim q, \sim q\Rightarrow r, r\Rightarrow s$ 이므로

① $p\Rightarrow s$, ② $p\Rightarrow r$ ② ①

따라서 p 는 s 이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$ 조건이고, r 는 p 이기 위한

$\boxed{\text{필요}}$ 조건이다.

043

주어진 명제를 가정과 결론으로 나누어 다음과 같이 조건으로 나타내면

p : 달리기를 잘 한다. q : 축구를 잘 한다.

r : 농구를 잘 한다.

주어진 두 명제가 모두 참이므로 (가)명제는 $p \Rightarrow q$, (나)명제는 $q \Rightarrow r$ 를 나타낸다. 이때 삼단논법에 의해

$$p \Rightarrow q \text{이고 } q \Rightarrow r \text{이므로 } p \Rightarrow r$$

따라서 「달리기를 잘 하는 학생은 농구를 잘 한다.」 또는 대우인 「농구를 잘 하지 못하는 학생은 달리기도 잘 하지 못한다.」가 참이라 할 수 있다.

044

조건 p , q 를 만족하는 집합을 각각 P , Q 라 하면

① $P = \{x | x \geq 1\}$, $Q = \{x | x \geq 0\}$ 에서 $P \subset Q$ 이므로 $p \Rightarrow q$ 즉, p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

② $P = \{-1, 1\}$, $Q = \{-1, 1\}$ 에서 $P = Q$ 이므로 $p \Leftrightarrow q$ 즉, p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

③ $[p \rightarrow q \text{의 반례}]$
 $x=1, y=-1$ 이면 $1+(-1)=0$ 이지만 $1^2+(-1)^2 \neq 0$
 $[p \leftarrow q]$ $x^2+y^2=0$ 이면 $x=0, y=0$ 이므로 $x+y=0$
 따라서 $p \nRightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

④ $[p \rightarrow q \text{의 반례}]$
 $x=1, y=-1$ 이면 $1 > -1$ 이지만 $\frac{1}{1} > \frac{1}{-1}$

$[p \leftarrow q \text{의 반례}]$

$$x=-1, y=1 \text{이면 } \frac{1}{-1} < \frac{1}{1} \text{이지만 } -1 < 1$$

따라서 $p \nRightarrow q$ 이므로 p 와 q 는 서로 아무 조건도 아니다.

⑤ $P = \{1\}$, $Q = \{1\}$ 에서 $P = Q$ 이므로 $p \Leftrightarrow q$ 즉, p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 p 가 q 이기 위한 필요조건인 것은 ③이다.

045

① $[p \rightarrow q \text{의 반례}]$
 $x=3, y=0$ 이면 $3+0 > 2$ 이지만 $3 > 1$ 이고 $0 < 1$

$$[p \leftarrow q] \ x > 1 \text{이고 } y > 1 \text{이면 } x+y > 1+1=2$$

따라서 $p \nRightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

② $[p \rightarrow q \text{의 반례}]$ $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ 이면 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 은 정수이지만 $x=y = \frac{1}{2}$ 은 정수가 아니다.

$$[p \leftarrow q] \ x, y \text{가 모두 정수이면 } x+y \text{도 정수이다.}$$

따라서 $p \nRightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

③ $[p \rightarrow q]$ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$

$$[p \leftarrow q] \ A \cap B = A \text{이면 } A \subset B$$

따라서 $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ $[p \rightarrow q]$ $xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이므로 $x^2 > 0$, $y^2 > 0$ 에서 $x^2 + y^2 > 0$

$[p \leftarrow q \text{의 반례}]$

$$x=1, y=0 \text{이면 } 1^2+0^2 > 0 \text{이지만 } 1 \cdot 0 = 0$$

따라서 $p \nRightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

⑤ $[p \rightarrow q \text{의 반례}]$ $x=-2$ 이면 $-2 < 1$ 이지만 $(-2)^2 > 1$
 $[p \leftarrow q]$ $x^2 < 1$ 이면 $-1 < x < 1$ 이므로 $x < 1$

따라서 $p \nRightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

따라서 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 ③이다.

046

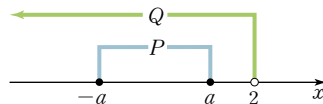
조건 p , q 를 만족하는 집합을 각각 P , Q 라 하면

$$\text{조건 } p \text{에서 } P = \{x | -a \leq x \leq a\}$$

$$\text{조건 } q : 2x-5 < x-3 \text{에서 } x < 2 \quad \therefore Q = \{x | x < 2\}$$

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow q$... ㉠

㉠에서 $P \subset Q$ 이므로 이를 수직선 위에 나타내면



$$\therefore a < 2$$

... ㉡

이때 조건 $p : -a \leq x \leq a$ 는 $a \geq 0$ 일 때 성립하므로 ㉠과 ㉡의 공통범위를 구하면

$$0 \leq a < 2$$

따라서 구하는 실수 a 의 값의 범위는 $0 \leq a < 2$

047

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$

또, 그 대우도 참이므로 $\sim p \Rightarrow \sim q$

즉, 명제 「 $x-2=0$ 이면 $x^2-ax+4=0$ 이다.」는 참이다.

$$\text{따라서 } x=2 \text{이면 } 4-2a+4=0$$

$$\therefore a=4$$

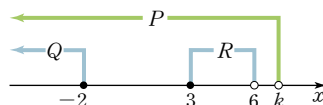
048

조건 p , q , r 를 만족하는 집합을 각각 P , Q , R 라 하면

$$P = \{x | x < k\}, Q = \{x | x \leq -2\}, R = \{x | 3 \leq x < 6\}$$

q 또는 r 가 p 이기 위한 충분조건이므로 $(Q \cup R) \subset P$

이를 만족하는 세 집합 P , Q , R 를 수직선 위에 나타내면



$$\therefore k \geq 6$$

따라서 상수 k 의 최솟값은 6이다.

001 ② 002 ① 003 ④ 004 ④
005 (가) 필요 (나) 충분 006 -1 007 $\neg$, $\supset$ 008 ⑤

001

- ㄱ. [명제] $x^2 > y^2$ 이면 $x > y$ 이다.
[반례] $x = -2, y = 1$ 이면 $(-2)^2 > 1^2$ 이지만 $-2 < 1$
($\therefore$ 거짓)
[역] $x > y$ 이면 $x^2 > y^2$ 이다.
[반례] $x = 1, y = -2$ 이면 $1 > -2$ 이지만 $1^2 < (-2)^2$
($\therefore$ 거짓)
주어진 명제와 그 역이 거짓이므로 대우와 이도 거짓이다.
- ㄴ. [명제] $x^2 + y^2 = 0$ 이면 $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이다. ($\therefore$ 참)
[역] $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이면 $x^2 + y^2 = 0$ 이다. ($\therefore$ 참)
주어진 명제와 그 역이 참이므로 대우와 이도 참이다.
- ㄷ. [명제] $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이면 $x + y > 0$ 이다. ($\therefore$ 참)
[역] $x + y > 0$ 이면 $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이다.
[반례] $x = 2, y = -1$ 이면 $2 + (-1) > 0$ 이지만 $2 > 0$ 이고 $-1 < 0$ ($\therefore$ 거짓)
주어진 명제가 참이므로 대우도 참이고 역이 거짓이므로 이도 거짓이다.
따라서 명제와 그 역, 이, 대우가 모두 참인 것은 ㄴ이다.

002

명제의 반례가 되는 집합은
 $P - Q^c = \{x | x \in P \text{이고 } x \notin Q^c\}$
 $= \{x | x \in P \text{이고 } x \in Q\}$
 $= P \cap Q$

003

- $p \rightarrow q$ 가 참이므로 대우인 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다. $\triangleleft \neg$
 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 대우인 $q \rightarrow r$ 도 참이다.
삼단논법에 의해 $p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow r$ 이므로
 $p \Rightarrow r$ $\triangleleft \supset$
 $p \rightarrow r$ 가 참이므로 대우인 $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다. $\triangleleft \supset$
따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

004

- ① [p $\rightarrow$ q의 반례]
 $a = -2, b = 1$ 이면 $-2 < 1$ 이지만 $|-2| > |1|$
[p $\leftarrow$ q의 반례]
 $a = 1, b = -2$ 이면 $|1| < |-2|$ 이지만 $1 > -2$
따라서 p $\nleftrightarrow$ q이므로 p는 q이기 위한 아무 조건도

아니다.

- ② [p $\rightarrow$ q] $|x| = |y|$ 이면 $|x|^2 = |y|^2$ 이므로 $x^2 = y^2$
[p $\leftarrow$ q]
 $x^2 = y^2$ 이면 $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$ 이므로 $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$ 에서 $|x| = |y|$
따라서 p $\nleftrightarrow$ q이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
- ③ [p $\rightarrow$ q] $a^2 + ab + b^2 = 0$ 이면
 $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$
 $= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 = 0$
에서 $a + \frac{b}{2} = 0, \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0$ 이므로 $a = b = 0$
[p $\leftarrow$ q] $a = b = 0$ 이면 $a^2 + ab + b^2 = 0$
따라서 p $\nleftrightarrow$ q이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
- ④ [p $\rightarrow$ q]
 $x > 0, y > 0$ 이면 $x^2 > 0, y^2 > 0$ 이므로 $x^2 + y^2 > 0$
[p $\leftarrow$ q의 반례]
 $x = 1, y = -1$ 이면 $1^2 + (-1)^2 > 0$ 이지만 $1 > 0, -1 < 0$
따라서 p $\nleftrightarrow$ q이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
- ⑤ [p $\rightarrow$ q의 반례] $a = 1, b = 1, x = -2, y = -2$ 이면
 $1 > -2$ 이지만 $1 \cdot 1 < (-2) \cdot (-2)$
[p $\leftarrow$ q의 반례] $a = -2, b = -2, x = 1, y = 1$ 이면
 $(-2) \cdot (-2) > 1 \cdot 1$ 이지만 $-2 < 1$
따라서 p $\nleftrightarrow$ q이므로 p는 q이기 위한 아무 조건도 아니다.
따라서 p가 q이기 위한 충분조건인 것은 ④이다.

005

I. p : $A \cup C = B \cup C, q : A = B$ 라 하면

[p $\rightarrow$ q의 반례] 

[p $\leftarrow$ q] $A = B$ 이면 $A \cup C = B \cup C$
따라서 p $\nleftrightarrow$ q이므로 $A \cup C = B \cup C$ 는 $A = B$ 이기 위한 ^(가)필요 조건이다.

II. r : $A \subset B$ 또는 $A \subset C, s : A \subset (B \cup C)$ 라 하면

[r $\rightarrow$ s] $A \subset B$ 또는 $A \subset C$ 이면 $A \subset (B \cup C)$

[r $\leftarrow$ s의 반례] 

따라서 r $\nleftrightarrow$ s이므로 $A \subset B$ 또는 $A \subset C$ 는 $A \subset (B \cup C)$ 이기 위한 ^(나)충분 조건이다.

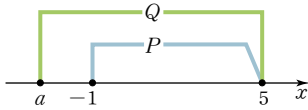
006

두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면

$$\begin{aligned} P &= \{x \mid x^2 - 4x - 5 \leq 0\} \\ &= \{x \mid (x+1)(x-5) \leq 0\} \\ &= \{x \mid -1 \leq x \leq 5\} \\ Q &= \{x \mid x^2 - (a+5)x + 5a \leq 0\} \\ &= \{x \mid (x-5)(x-a) \leq 0\} \\ &= \{x \mid a \leq x \leq 5\} \text{ 또는 } \{x \mid 5 \leq x \leq a\} \end{aligned}$$

이때 p가 q이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow q$, 즉 $P \subset Q$ 이를 수직선 위에 나타내면 $Q = \{x \mid 5 \leq x \leq a\}$ 일 때는 $P \subset Q$ 를 만족할 수 없으므로

$$Q = \{x \mid a \leq x \leq 5\}$$



$$\therefore a \leq -1$$

따라서 상수 a의 최댓값은 -1이다.

007

주어진 명제가 거짓이므로 그 명제의 부정은 참이다.

「모든 ~」의 부정은 「어떤 ~」이므로 주어진 명제의 부정은

「이 가게 안의 어떤 상품은 할인판매를 하고 있지 않다.」

이고, 이 명제는 참이다.

따라서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

008

주어진 말을 가정과 결론으로 나누어 다음과 같이 조건으로 나타내면

p : 지금 나가지 않는다.

q : 기차를 타지 못한다.

r : 정시에 도착하지 못한다.

s : 약속 시간을 어긴다.

이므로 세 사람의 말은

민수 : $p \Rightarrow q$, 철민 : $q \Rightarrow r$, 희수 : $r \Rightarrow s$

이다. 이때 삼단논법에 의해

$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$ ◀①

$q \Rightarrow r, r \Rightarrow s$ 이므로 $q \Rightarrow s$ ◀②

$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, r \Rightarrow s$ 이므로 $p \Rightarrow s$ ◀③

또한, $q \Rightarrow s$ 의 대우도 참이므로 $\sim s \Rightarrow \sim q$ ◀④

$\sim p \rightarrow \sim s$ 는 명제 $p \Rightarrow s$ 의 이이므로 반드시 참이라 할 수 없다.

따라서 항상 참이라 할 수 없는 것은 ⑤이다.

중단원 연습문제

pp. 38~40

001 ③	002 ④	003 ④	004 ②	005 ㄱ, ㄷ, ㄹ
006 2개	007 12	008 24	009 ㄱ	010 15
011 ③	012 30명	013 4		

001

① 아름다움은 주관적 판단이므로 명제가 아니다.

② [반례] 세 내각의 크기가 각각 $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 인 삼각형은 두 내각의 크기는 같지만 정삼각형은 아니다. ($\therefore$ 거짓)

③ 12의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12의 6개이다. ($\therefore$ 참)

④ [반례] $x=2$ 는 소수이지만 홀수는 아니다. ($\therefore$ 거짓)

⑤ [반례] $x=0$ 은 실수이지만 $0^2=0$ ($\therefore$ 거짓)

따라서 참인 명제는 ③이다.

002

집합 A의 부분집합을 B라 하고 $4 \in B$ 인 경우와 $4 \notin B$ 인 경우로 나누어 생각해 보자.

(i) $4 \in B$ 인 경우

집합 B가 4를 포함하고 있으므로 나머지 원소는 어떤 것이 와도 집합 B의 각 원소의 곱이 4의 배수가 된다. 즉, 집합 B의 개수는 집합 A의 부분집합 중 4를 반드시 포함하는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{6-1} = 2^5 = 32(\text{개})$$

(ii) $4 \notin B$ 인 경우

집합 B가 4를 포함하고 있지 않으므로 각 원소의 곱이 4의 배수가 되기 위해서는 2와 6을 반드시 포함해야 한다. 즉, 집합 B의 개수는 집합 A의 부분집합 중 2, 6을 포함하고, 4를 포함하지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{6-2-1} = 2^3 = 8(\text{개})$$

(i), (ii)에서 구하는 부분집합의 개수는 $32+8=40(\text{개})$ 이다.

003

주어진 명제와 그 역이 참이면 역, 이, 대우가 모두 참이므로 명제와 그 역의 참, 거짓을 판별해 보면 다음과 같다.

① [명제] $x=1$ 이면 $x^2-3x+2=0$ 이다. ($\therefore$ 참)

[역] $x^2-3x+2=0$ 이면 $x=1$ 이다.

[반례] $x=2$ 이면 $2^2-3 \cdot 2+2=0$ 이지만 $2 \neq 1$ ($\therefore$ 거짓)

② [명제] $x^2=a$ 이면 $x=\sqrt{a}$ 이다.

[반례] $x=-\sqrt{a}$ 이면 $(-\sqrt{a})^2=a$ 이지만 $-\sqrt{a} \neq \sqrt{a}$

($\therefore$ 거짓)

③ [명제] $x>0$ 이면 $x^2>0$ 이다. ($\therefore$ 참)

[역] $x^2>0$ 이면 $x>0$ 이다.

[반례] $x=-1$ 이면 $(-1)^2>0$ 이지만 $-1<0$ ($\therefore$ 거짓)

- ④ [명제] $x=2$ 이면 $x^2-4x+4=0$ 이다. ($\therefore$ 참)
 [역] $x^2-4x+4=0$ 이면 $x=2$ 이다.
 $x^2-4x+4=(x-2)^2=0$ 에서 $x=2$ ($\therefore$ 참)
 ⑤ [명제] $\sqrt{(x-2)^2}=x-2$ 이면 $x>2$ 이다.
 [반례] $x=2$ 이면 $\sqrt{(2-2)^2}=2-2$ 이지만 $2=2$ ($\therefore$ 거짓)
 따라서 역, 이, 대우가 모두 참인 명제는 ④이다.

004

명제 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이므로 $Q \subset P^c$
 $\therefore Q \subset P^c \iff P \cap Q = \emptyset$
 따라서 바르게 나타난 것은 ②이다.

005

- ㉠. $A - (B \cup C)$
 $= A \cap (B \cup C)^c$ ◀ 차집합의 성질
 $= A \cap (B^c \cap C^c)$ ◀ 드 모르간의 법칙
 $= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c)$ ◀ 분배법칙
 $= (A-B) \cap (A-C)$ ($\therefore$ 참) ◀ 차집합의 성질
- ㉡. $(A \cap B) - C$
 $= (A \cap B) \cap C^c$ ◀ 차집합의 성질
 $= (A \cap C^c) \cap (B \cap C^c)$ ◀ 분배법칙
 $= (A-C) \cap (B-C)$ ($\therefore$ 거짓) ◀ 차집합의 성질
- ㉢. $(A-B) - C$
 $= (A-B) \cap C^c$ ◀ 차집합의 성질
 $= (A \cap B^c) \cap C^c$ ◀ 차집합의 성질
 $= A \cap (B^c \cap C^c)$ ◀ 결합법칙
 $= A \cap (B \cup C)^c$ ◀ 드 모르간의 법칙
 $= A - (B \cup C)$ ($\therefore$ 참) ◀ 차집합의 성질
- ㉣. $(A-B^c) \cap (B^c-C)^c$
 $= (A \cap B) \cap (B^c \cap C^c)^c$ ◀ 차집합의 성질
 $= (A \cap B) \cap (B \cup C)$ ◀ 드 모르간의 법칙
 $= A \cap B$ ($\therefore$ 거짓) ◀ $(A \cap B) \subset B$
- ㉤. $A \cup (A \cap B)^c$
 $= A \cup (A^c \cup B^c)$ ◀ 드 모르간의 법칙
 $= (A \cup A^c) \cup B^c$ ◀ 결합법칙
 $= U \cup B^c = U$ ($\therefore$ 참)
- ㉥. $(A-B)^c \cap (B^c-A)^c$
 $= (A \cap B^c)^c \cap (B^c \cap A^c)^c$ ◀ 차집합의 성질
 $= (A^c \cup B) \cap (B \cup A)$ ◀ 드 모르간의 법칙
 $= (A^c \cup B) \cap (A \cup B)$ ◀ 교환법칙
 $= (A^c \cap A) \cup B$ ◀ 분배법칙
 $= \emptyset \cup B = B$ ($\therefore$ 거짓)
 따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢, ㉤이다.

006

명제 $p \rightarrow q$ 의 반례는 p 이지만 q 가 아닌 것을 찾아야 한다.
 즉, 자연수 n 의 각 자리 숫자의 합이 6의 배수이지만 n 은 6의 배수가 아닌 것을 찾아야 한다.
 주어진 수 중에서 30은 각 자리의 숫자의 합이 6의 배수가 아니므로, 42, 66은 6의 배수이므로 적당하지 않다.
 따라서 반례로 적당한 n 은 33, 51의 2개이다.

007

분배법칙에 의해

$$D_{35} \cap (D_{21} \cup D_{15}) = (D_{35} \cap D_{21}) \cup (D_{35} \cap D_{15})$$

$D_{35} \cap D_{21}$ 은 35와 21의 최대공약수인 7의 약수의 집합과 같으므로 $D_{35} \cap D_{21} = D_7$

$D_{35} \cap D_{15}$ 은 35와 15의 최대공약수인 5의 약수의 집합과 같으므로 $D_{35} \cap D_{15} = D_5$

$$\therefore D_{35} \cap (D_{21} \cup D_{15}) = (D_{35} \cap D_{21}) \cup (D_{35} \cap D_{15}) = D_7 \cup D_5$$

$$\therefore k+1=7+5=12$$

008

학생 전체의 집합을 U , A영화를 관람한 학생의 집합을 A , B영화를 관람한 학생의 집합을 B 라 하면
 $n(U)=30, n(A)=16, n(B)=22$
 $n(A)=16 < 22=n(B)$ 에서 $n(A \cup B)$ 의 최솟값은 22이고, 전체 학생 수는 30명이므로 $n(A \cup B)$ 의 최댓값은 30이다.
 $\therefore 22 \leq n(A \cup B) \leq 30$ ㉠
 이때 두 영화를 모두 관람한 학생의 집합은 $A \cap B$ 이고
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 이므로 ㉠에서
 $22 \leq n(A) + n(B) - n(A \cap B) \leq 30$
 $22 \leq 16 + 22 - n(A \cap B) \leq 30$
 $\therefore 8 \leq n(A \cap B) \leq 16$
 따라서 두 영화를 모두 관람한 학생 수의 최댓값은 16, 최솟값은 8이므로 그 합은 $16+8=24$

009

㉠. $[p \rightarrow q]$ $a+b$ 가 짝수이면 a, b 는 모두 짝수이거나 모두 홀수이므로 a^2, b^2 도 모두 짝수이거나 모두 홀수이다. 즉, a^2+b^2 은 짝수이다.
 $[p \leftarrow q]$ a^2+b^2 이 짝수이면 a^2, b^2 은 모두 짝수이거나 모두 홀수이므로 a, b 도 모두 짝수이거나 모두 홀수이다. 즉, $a+b$ 는 짝수이다.
 따라서 $p \iff q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

ㄴ. $[p \rightarrow q]$ 의 반례 $a=3, b=2$ 이면 $3 \cdot 2=6$ 은 짝수이지만 $3+2=5$ 는 홀수이다.

$[p \leftarrow q]$ 의 반례 $a=5, b=3$ 이면 $5+3=8$ 은 짝수이지만 $5 \cdot 3=15$ 는 홀수이다.

따라서 $p \not\leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 아무 조건도 아니다.

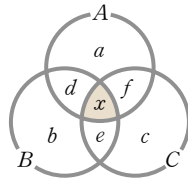
ㄷ. $[p \rightarrow q]$ $\frac{a}{b}$ 가 짝수이면 $a=2kb$ (k 는 자연수)로 놓을 수 있고, a 는 짝수이므로 ab 도 짝수이다.

$[p \leftarrow q]$ 의 반례 $a=6, b=2$ 이면 $6 \cdot 2=12$ 는 짝수이지만 $\frac{6}{2}=3$ 은 홀수이다.

따라서 $p \not\leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
따라서 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄱ이다.

010

세 집합 A, B, C 를 오른쪽 그림과 같은 벤 다이어그램으로 나타내고, 각 부분에 속하는 원소의 개수를 각각 a, b, c, d, e, f, x 로 놓으면



$$n(A \cup B \cup C) = a + b + c + d + e + f + x = 45 \quad \text{..... ㉠}$$

$$n(A \cap B) = a + b + e + f = 20 \quad \text{..... ㉡}$$

$$n(B \cap C) = b + c + d + f = 17 \quad \text{..... ㉢}$$

$$n(A \cap C) = a + c + d + e = 23 \quad \text{..... ㉣}$$

㉠+㉡+㉢+㉣에서

$$2(a + b + c + d + e + f) = 60 \quad \text{..... ㉤}$$

$$\therefore a + b + c + d + e + f = 30 \quad \text{..... ㉥}$$

㉠-㉥에서 $x=15$

$$\therefore n(A \cap B \cap C) = x = 15$$

011

주어진 조건을 각각

p : A가 보충수업을 신청한다.

q : B가 보충수업을 신청한다.

r : C가 보충수업을 신청한다.

로 놓으면 주어진 규칙 (가), (나)에 의해

$$p \Rightarrow q (\cdots \text{㉠}), \sim p \Rightarrow r (\cdots \text{㉡})$$

㉠, ㉡의 각각의 대우도 참이므로

$$\sim q \Rightarrow \sim p (\cdots \text{㉢}), \sim r \Rightarrow p (\cdots \text{㉣})$$

㉢, ㉣에서 삼단논법에 의해

$$\sim r \Rightarrow p \text{이고 } p \Rightarrow q \text{이므로 } \sim r \Rightarrow q$$

이고 그 대우도 참이므로 $\sim q \Rightarrow r$

따라서 옳은 것은 ㉢ B가 보충수업을 신청하지 않으면 C가 보충수업을 신청한다.

012

두 정당 A, B를 지지하는 사람들의 집합을 각각 A, B라 하고, A정당을 지지하는 사람 수를 x 라 하면 B정당을 지지하는 사람 수는 A정당을 지지하는 사람 수의 2배이므로

$$n(A)=x, n(B)=2x \quad \text{..... ㉠}$$

B정당을 지지하는 사람 중 두 정당을 모두 지지하는 사람이 20%이므로 $n(A \cap B) = 2x \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}x$ ㉡

어느 정당도 지지하지 않는 사람의 집합은

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이고, 그 수는 전체의 22%이므로

$$n\{(A \cup B)^c\} = 100 \times \frac{22}{100} = 22$$

$$\therefore n(A \cup B) = n(U) - n\{(A \cup B)^c\} = 100 - 22 = 78 \quad \text{..... ㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에서 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에 의해

$$78 = x + 2x - \frac{2}{5}x, 78 = \frac{13}{5}x \quad \therefore x = 30$$

따라서 A정당을 지지하는 사람 수는 30명이다.

채점 영역	단계	채점 요소	배점 비율
문제 이해	㉠	조건을 집합으로 표현하고 사람 수를 x 에 대하여 나타내기	20%
해결 과정	㉡	$n(A \cap B)$ 를 x 에 대하여 나타내기	20%
	㉢	$n(A \cup B)$ 의 값 구하기	30%
답 구하기	㉣	㉠, ㉡, ㉢를 이용하여 x 의 값 구하기	30%

013

q 는 p 이기 위한 필요조건이므로

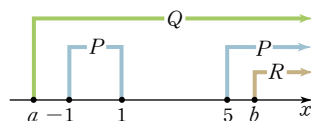
$$p \Rightarrow q, \text{ 즉 } P \subset Q \quad \text{..... ㉠}$$

r 는 p 이기 위한 충분조건이므로

$$r \Rightarrow p, \text{ 즉 } R \subset P \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서 $R \subset P \subset Q$

이를 만족하는 세 집합 P, Q, R를 수직선 위에 나타내면



$$\therefore a \leq -1, b \geq 5$$

따라서 a의 최댓값은 -1, b의 최솟값은 5이므로 그 합은
 $(-1)+5=4$

라

채점 영역	단계	채점 요소	배점 비율
문제 이해 &	㉠	집합 P, Q의 포함 관계 구하기	20%
	㉡	집합 R, P의 포함 관계 구하기	20%
해결 과정	㉢	집합 P, Q, R를 수직선 위에 나타내기	30%
답 구하기	㉣	a, b의 범위를 구하여 최댓값, 최솟값 구하기	30%

사고력 기르기

p. 41

001 ④ 002 224 003 3 004 ⑤

001

$A_k=\{x|x=k\}$ 에서 $x=1$ 을 만족하는 x 는 3으로 나누어 나
 머지가 1인 수이므로

$$A_1=\{3n+1|n \text{은 } 0 \text{ 또는 자연수}\}$$

마찬가지로 $A_2=\{3n+2|n \text{은 } 0 \text{ 또는 자연수}\}$

$$A_3=\{3n|n \text{은 자연수}\}$$

집합 B의 원소를 구하기 위해 x 를 자연수라 하면 x 는 $3n$,
 $3n+1$, $3n+2$ 중 하나이다.

(i) $x=3n$ 일 때

$$(3n)^2=9n^2 \text{이고 } (3n)^2 \text{과 } 3n \text{은 } 3 \text{으로 나누어 떨어지므로 } 3n \in B$$

(ii) $x=3n+1$ 일 때

$$(3n+1)^2=9n^2+6n+1=3(3n^2+2n)+1 \text{이고}$$

$$(3n+1)^2 \text{과 } 3n+1 \text{은 } 3 \text{으로 나누어 나머지가 } 1 \text{이므로}$$

$$3n+1 \in B$$

(iii) $x=3n+2$ 일 때

$$(3n+2)^2=9n^2+12n+4=3(3n^2+4n+1)+1 \text{이고}$$

$$(3n+2)^2 \text{은 } 3 \text{으로 나누어 나머지가 } 1 \text{이고, } 3n+2 \text{는 } 3$$

$$\text{으로 나누어 나머지가 } 2 \text{이므로 } 3n+2 \notin B$$

$$\neg. 3n \in B, 3n+1 \in B \text{이므로 } A_1 \cup A_3 = B (\therefore \text{참})$$

$$\neg. 3n+2 \notin B \text{이므로 } A_2 \cap B = \emptyset (\therefore \text{참})$$

$$\neg. A_2 \cap B = \emptyset \text{이므로 } B - A_2 = B (\therefore \text{거짓})$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

002

두 집합 A, B에 대하여 $A=B^c$ 이므로

$$A \cup B = B^c \cup B = U, A \cap B = B^c \cap B = \emptyset$$

즉, 집합 A, B는 전체집합 U의 모든 원소를 공통부분 없이
 나누어 가지는 부분집합이다.

$f(A)$, $f(B)$ 는 각각 집합 A, B의 원소의 총합이므로

$$f(A)+f(B)=f(U)=2+4+6+8+10=30$$

이때 $f(A)=x$ 라 놓으면 $f(B)=30-x$ 이므로

$$f(A) \cdot f(B)=x(30-x)=-x^2+30x$$

$$=-(x-15)^2+225$$

그런데 전체집합 U의 원소는 모두 짝수이므로 $x=14$ 또는
 $x=16$ 일 때 최댓값을 가진다.

따라서 $f(A) \cdot f(B)$ 의 최댓값은 $14 \cdot 16=224$

003

(가) $f(\sim p, q)=2$ 에서 $\sim p$ 는 q 이기 위한 필요조건이므로

$$q \implies \sim p \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{그 대우도 참이므로 } p \implies \sim q \quad \dots\dots \text{㉡}$$

(나) $f(\sim r, q)=1$ 에서 $\sim r$ 는 q 이기 위한 충분조건이므로

$$\sim r \implies q \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\text{그 대우도 참이므로 } \sim q \implies r \quad \dots\dots \text{㉣}$$

(다) $f(r, s)=1$ 에서 r 는 s 이기 위한 충분조건이므로

$$r \implies s \quad \dots\dots \text{㉤}$$

$$\text{그 대우도 참이므로 } \sim s \implies \sim r \quad \dots\dots \text{㉥}$$

(i) ㉠, ㉡에서 삼단논법에 의해

$$p \implies \sim q \text{이고 } \sim q \implies r \text{이므로 } p \implies r$$

$$\text{즉, } r \text{는 } p \text{이기 위한 필요조건이므로 } f(r, p)=2$$

(ii) ㉢, ㉣, ㉤에서 삼단논법에 의해

$$p \implies \sim q \text{이고 } \sim q \implies r \text{이고 } r \implies s \text{이므로 } p \implies s$$

$$\text{즉, } p \text{는 } s \text{이기 위한 충분조건이므로 } f(p, s)=1$$

$$\therefore f(r, p)+f(p, s)=2+1=3$$

004

주어진 사실을 가정과 결론으로 나누어 다음과 같이 조건으로
 나타내면

$$p : A \text{가 범인이다.} \quad q : B \text{가 범인이다.}$$

$$r : C \text{가 범인이다.} \quad s : D \text{가 범인이다.}$$

이를 이용하여 심문한 결과를 나타내면

$$(가) p \implies q$$

$$(나) q \implies r \text{ 또는 } \sim p$$

$$(다) s \implies p \text{ (대우: } \sim p \implies \sim s)$$

$$(라) \sim s \implies p \text{이고 } \sim r \text{ (대우: } \sim p \text{ 또는 } r \implies s)$$

(i) A가 범인이 아니면 (다), (라)에서 삼단논법에 의해

$$\sim p \implies \sim s \text{이고 } \sim s \implies p \text{이므로 } \sim p \implies p$$

가 되어 모순이다. 즉, A는 범인이다.

(ii) (가)에서 $p \implies q$ 이므로 B도 범인이다.

(iii) (나)에서 $q \implies r$ 이므로($\sim p$ 는 거짓) C도 범인이다.

(iv) (라)에서 $r \implies s$ 이므로($\sim p$ 는 거짓) D도 범인이다.

(i), (ii), (iii), (iv)에서 A, B, C, D 모두 공범이다.

(i) 덧셈 : $x+y=2^m+2^n \notin A$

($\because m=2, n=3$ 일 때, $x+y=2^2+2^3=12$ 이고
12는 2^k (k 는 정수) 꼴로 나타낼 수 없다.)

(ii) 뺄셈 : $x-y=2^m-2^n \notin A$

($\because m=3, n=1$ 일 때, $x-y=2^3-2^1=6$ 이고
6은 2^k (k 는 정수) 꼴로 나타낼 수 없다.)

(iii) 곱셈 : $xy=2^m \cdot 2^n=2^{m+n} \in A$

($\because$ 정수는 덧셈에 대하여 닫혀 있으므로 $m+n$
은 정수이다.)

(iv) 나눗셈 : $\frac{x}{y} = \frac{2^m}{2^n} = 2^{m-n} \in A$

($\because$ 정수는 뺄셈에 대하여 닫혀 있으므로 $m-n$
도 정수이다.)

따라서 집합 A 는 곱셈과 나눗셈에 대하여 닫혀 있다.

054

① 집합 A 의 임의의 두 원소를 x, y 라 하면

$x=2m, y=2n$ (단, m, n 은 정수)

으로 놓을 수 있으므로

$x+y=2m+2n=2(\underbrace{m+n}_{\text{정수}}) \in A$

② 집합 B 의 임의의 두 원소를 x, y 라 하면

$x=3m+1, y=3n+1$ (단, m, n 은 정수)

로 놓을 수 있으므로

$x+y=(3m+1)+(3n+1)=3(\underbrace{m+n}_{\text{정수}})+2 \notin B$

③ 집합 C 의 임의의 두 원소를 x, y 라 하면

$x=\frac{1}{2}m, y=\frac{1}{2}n$ (단, m, n 은 자연수)

으로 놓을 수 있으므로

$x+y=\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}(\underbrace{m+n}_{\text{자연수}}) \in C$

④ 집합 D 의 임의의 두 원소를 x, y 라 하면

$x=m\sqrt{2}, y=n\sqrt{2}$ (단, m, n 은 유리수)

로 놓을 수 있으므로

$x+y=m\sqrt{2}+n\sqrt{2}=(\underbrace{m+n}_{\text{유리수}})\sqrt{2} \in D$

⑤ 집합 E 의 임의의 두 원소를

$x=m+n\sqrt{2}, y=1+k\sqrt{2}$

(단, m, n, l, k 는 음의 정수)

로 놓을 수 있으므로

$x+y=(m+n\sqrt{2})+(1+k\sqrt{2})$
 $=\underbrace{(m+1)}_{\text{음의 정수}}+\underbrace{(n+k)}_{\text{음의 정수}}\sqrt{2} \in E$

055

$a+\sqrt{2}$ 가 ^(가) 유리수 라고 가정하면 $a+\sqrt{2}$ 와 a 는 유리수이

고, 유리수 전체의 집합은 ^(나) 뺄셈 에 대하여 닫혀 있으므로

$a+\sqrt{2}-a=\sqrt{2}$ (^(다) 유리수)

그런데 이것은 $\sqrt{2}$ 가 무리수라는 가정에 모순이다.

따라서 $a+\sqrt{2}$ 는 무리수이다.

056

$a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ 를 변형하면

$a-c=(d-b)\sqrt{2}$ ㉠

^(가) $b \neq d$ 라고 가정하면 $\sqrt{2} = \frac{a-c}{d-b}$

이때 a, b, c, d 가 ^(나) 유리수 이고, 유리수 전체의 집합은 덧

셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈에 대하여 닫혀 있으므로 $\frac{a-c}{d-b}$ 도

^(다) 유리수 이다.

그런데 이것은 $\sqrt{2}$ 가 ^(라) 무리수 라는 가정에 모순이다.

따라서 $b=d$ 이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$a-c=0 \quad \therefore a=c$

02 실수의 연산에 대한 성질

개념 확인 문제

p. 46

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------|
| 1 (1) $-3, \frac{1}{3}$ | (2) $0.5, -2$ |
| (3) $-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$ | (4) $-1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1$ |
| 2 (1) -7 | (2) 5 |

1

임의의 실수 a 에 대하여

$a+0=0+a=a, a \times 1=1 \times a=a$

를 만족하는 실수 $0, 1$ 이 존재하므로 덧셈에 대한 항등원은 0 ,

곱셈에 대한 항등원은 1 이다.

따라서 실수 전체의 집합에서 덧셈과 곱셈에 대한 항등원이 각

각 $0, 1$ 이므로 덧셈에 대한 a 의 역원을 x , 곱셈에 대한 a 의

역원을 y 라 하면

$a+x=0 \quad \therefore x=-a$

$a \cdot y=1 \quad \therefore y=\frac{1}{a}$

즉, 임의의 실수 a 에 대하여

덧셈에 대한 역원 : $-a$, 곱셈에 대한 역원 : $\frac{1}{a}$

따라서 주어진 수의 덧셈과 곱셈에 대한 역원을 구하면

(1) 3의 덧셈에 대한 역원 $\Rightarrow -3$

곱셈에 대한 역원 $\Rightarrow \frac{1}{3}$

(2) -0.5 의 덧셈에 대한 역원 $\Rightarrow 0.5$

곱셈에 대한 역원 $\Rightarrow -\frac{1}{0.5} = -2$

(3) $\sqrt{3}$ 의 덧셈에 대한 역원 $\Rightarrow -\sqrt{3}$

곱셈에 대한 역원 $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(4) $1+\sqrt{2}$ 의 덧셈에 대한 역원 $\Rightarrow -1-\sqrt{2}$

곱셈에 대한 역원 $\Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$

2

(1) $3 \odot (-2) = 3 \cdot (-2) - 3 - (-2) = -7$

(2) $(3 \odot 1) \odot (-2) = (3 \cdot 1 - 3 - 1) \odot (-2)$
 $= -1 \odot (-2)$
 $= (-1) \cdot (-2) - (-1) - (-2)$
 $= 5$

유 제

pp. 47~49

057 2	058 1	059 -4	060 $\frac{5}{2}$	061 $-\frac{9}{5}$
062 5	063 (가) 결합 (나) 항등원 (다) 역원			

057

교환법칙이 성립하려면 임의의 두 실수 a, b 에 대하여

$$a \triangle b = b \triangle a$$

가 성립해야 하므로

$$a \triangle b = k^2a + 4kb - 4b + 1, b \triangle a = k^2b + 4ka - 4a + 1$$

에서

$$k^2a + 4kb - 4b + 1 = k^2b + 4ka - 4a + 1$$

$$k^2a + (4k-4)b = k^2b + (4k-4)a$$

$$k^2(a-b) - (4k-4)(a-b) = 0$$

$$\therefore (k^2 - 4k + 4)(a-b) = 0$$

이때 a, b 가 임의의 실수이므로

$$k^2 - 4k + 4 = 0, (k-2)^2 = 0 \quad \therefore k = 2$$

058

결합법칙이 성립하려면 임의의 실수 x, y, z 에 대하여

$$(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$$

가 성립해야 하므로

$$(x \odot y) \odot z = (ax + y + 1) \odot z = a^2x + ay + a + z + 1$$

$$x \odot (y \odot z) = x \odot (ay + z + 1) = ax + ay + z + 2$$

에서

$$a^2x + ay + a + z + 1 = ax + ay + z + 2$$

$$x(a^2 - a) + a - 1 = 0$$

이때 x 가 임의의 실수이므로

$$a^2 - a = 0, a - 1 = 0$$

$$\iff a(a-1) = 0, a-1 = 0$$

$$\iff a = 1$$

059

교환법칙이 성립하므로

$$1 \odot 3 = x, 3 \odot 1 = 1 \text{에서} \quad x = 1$$

$$1 \odot 2 = 3, 2 \odot 1 = y \text{에서} \quad y = 3$$

$$2 \odot 3 = 2, 3 \odot 2 = z \text{에서} \quad z = 2$$

$$\therefore x - y - z = 1 - 3 - 2 = -4$$

060

연산 $\diamond$ 에 대한 항등원을 e 라 하면 임의의 실수 a 에 대하여

$$a \diamond e = e \diamond a = a$$

이므로 $a \diamond e = a$ 에서

$$(a-1)(e-1) + 1 = a$$

$$ae - a - e + 2 = a$$

$$\therefore (a-1)(e-2) = 0$$

이때 위의 등식은 임의의 실수 a 에 대하여 성립해야 하므로

$$e-2=0 \quad \therefore e=2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또, -1 의 역원을 x 라 하면 연산 $\diamond$ 에 대한 항등원이 2 이므로

$$(-1) \diamond x = x \diamond (-1) = 2$$

$$(-1) \diamond x = 2 \text{에서} \quad (-1-1)(x-1) + 1 = 2$$

$$-2x + 3 = 2 \quad \therefore x = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서} \quad p=2, q=\frac{1}{2}$$

$$\therefore p+q = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

061

$x-1=a, y-1=b$ 로 치환하면 $x=a+1, y=b+1$ 이므로 주어진 식은

$$a * b = (a+1)(b+1) + (a+1) + (b+1) - 1$$

$$= ab + 2a + 2b + 2$$

연산 $*$ 에 대한 항등원을 e 라 하면 임의의 실수 a 에 대하여

$$a * e = e * a = a$$

이므로 $a * e = a$ 에서

$$ae + 2a + 2e + 2 = a$$

$$a(e+1) + 2(e+1) = 0$$

$$\therefore (a+2)(e+1) = 0$$

이때 위의 등식은 임의의 실수 a 에 대하여 성립해야 하므로

$$e+1=0 \quad \therefore e=-1$$

3의 역원을 z 라 하면 연산 $*$ 에 대한 항등원이 -1 이므로

$$3 * z = z * 3 = -1$$

$$3 * z = -1 \text{에서} \quad 3z + 6 + 2z + 2 = -1$$

$$\therefore z = -\frac{9}{5}$$

062

주어진 연산표에서

$$1 \otimes 4 = 4 \otimes 1 = 1$$

$$2 \otimes 4 = 4 \otimes 2 = 2$$

$$3 \otimes 4 = 4 \otimes 3 = 3$$

$$4 \otimes 4 = 4$$

이므로 연산 $\otimes$ 에 대한 집합 A 의

항등원은 4이다.

$$\therefore x=4$$

이때 연산 $\otimes$ 에 대한 3의 역원을 y 라 하면

$$3 \otimes y = y \otimes 3 = 4$$

이고, 주어진 연산표에서

$$3 \otimes 1 = 1 \otimes 3 = 4$$

이므로 연산 $\otimes$ 에 대한 3의 역원은 1이다.

$$\therefore y=1$$

$$\therefore x+y=4+1=5$$

$\otimes$	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

063

방정식의 양변에 덧셈에 대한 3의 역원 -3 을 더하면

$$(2x+3) + (-3) = 7 + (-3)$$

$$\therefore (2x+3) + (-3) = 4$$

덧셈에 대한 ⁽⁷⁾결합 법칙에 의해

$$2x + \{3 + (-3)\} = 4 \quad \therefore 2x + 0 = 4$$

덧셈에 대한 ⁽⁶⁾항등원 의 성질에 의해

$$2x = 4$$

양변에 곱셈에 대한 2의 역원 $\frac{1}{2}$ 을 곱하면

$$\frac{1}{2} \times 2x = \frac{1}{2} \times 4 \quad \therefore \frac{1}{2} \times 2x = 2$$

곱셈에 대한 ⁽⁴⁾역원 의 성질에 의해 $1 \times x = 2$

곱셈에 대한 항등원의 성질에 의해 $x = 2$

03 실수의 대소 관계

개념 확인 문제

p. 51

$$1 (1) 5 > 2\sqrt{6} \quad (2) \sqrt{17}-1 < 3\sqrt{2}-1$$

$$2 (1) 1-2\sqrt{2}+\sqrt{5} \quad (2) 4-\sqrt{6}$$

1

$$(1) 5-2\sqrt{6}=\sqrt{25}-\sqrt{24}>0 \text{이므로}$$

$$5>2\sqrt{6}$$

$$(2) \sqrt{17}-1-(3\sqrt{2}-1)=\sqrt{17}-3\sqrt{2}=\sqrt{17}-\sqrt{18}<0$$

$$\therefore \sqrt{17}-1<3\sqrt{2}-1$$

2

$$(1) 2\sqrt{2}=\sqrt{8}, 3=\sqrt{9} \text{이므로} \quad 2\sqrt{2}<3$$

$$\therefore 2\sqrt{2}-3<0 \Rightarrow |2\sqrt{2}-3| = -(2\sqrt{2}-3)$$

$$\text{또, } 2=\sqrt{4} \text{이므로} \quad \sqrt{5}>2$$

$$\therefore \sqrt{5}-2>0 \Rightarrow |\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2$$

$$\therefore |2\sqrt{2}-3| + |\sqrt{5}-2| = -(2\sqrt{2}-3) + \sqrt{5}-2 \\ = 1-2\sqrt{2}+\sqrt{5}$$

$$(2) \pi \approx 3.14, \sqrt{6}=2.\times\times\times \text{이므로}$$

$$\pi<4, \pi>\sqrt{6} \quad \therefore \pi-4<0, \pi-\sqrt{6}>0$$

$$\therefore |\pi-4| + |\pi-\sqrt{6}| = -(\pi-4) + \pi-\sqrt{6} \\ = 4-\sqrt{6}$$

유 제

pp. 52~54

$$064 \text{ ③} \quad 065 \text{ ②} \quad 066 \text{ ⑤}$$

$$067 (가) > (나) > (다) \geq \quad 068 \text{ 풀이 참조}$$

$$069 (1) 3x-10 \quad (2) 8 \quad 070 13 \quad 071 -2$$

064

$$\text{① } a>b, b>c \text{이므로} \quad a-b>0, b-c>0$$

$$\text{이때 } a-c=(a-b)+(b-c)>0 \text{이므로}$$

$$a>c (\therefore \text{참})$$

$$\text{② } a+c>b+c \text{의 양변에 } -c \text{를 더하면}$$

$$a+c+(-c)>b+c+(-c)$$

$$a+0>b+0 \quad \therefore a>b (\therefore \text{참})$$

$$\text{③ [반례]} a=1, b=-1 \text{이면 } a>b \text{이지만 } \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \text{이다.}$$

($\therefore$ 거짓)

$$\text{④ } a>b, c>0 \text{이므로} \quad a-b>0, c>0$$

$$\therefore ac-bc=(a-b)c>0 \quad \therefore ac>bc (\therefore \text{참})$$

$$\text{⑤ } a>b>0 \text{이므로} \quad a+b>0, a-b>0$$

$$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)>0 \quad \therefore a^2>b^2 (\therefore \text{참})$$

065

$a > b$ 이고 $ab < 0$ 이므로 $a > 0 > b$ 이다.

- ① [반례] $a=2, b=-3$ 이면 $a^2 < b^2$ ($\therefore$ 거짓)
 ② $b < 0, a-b > 0$ 이므로
 $ab - b^2 = b(a-b) < 0 \quad \therefore ab < b^2$ ($\therefore$ 참)
 ③ [반례] $a=1, b=-1$ 이면 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ($\therefore$ 거짓)
 ④ $a > 0, b < 0$ 이므로 $\frac{a}{b} < 0$ ($\therefore$ 거짓)
 ⑤ [반례] $a=1, b=-2$ 이면 $a+b < 0$ ($\therefore$ 거짓)

066

$a > b > 0, c > d > 0$ 이므로 $a-b > 0, c-d > 0$

- ① $(a+c)-(b+d) = (a-b) + (c-d) > 0$
 $\therefore a+c > b+d$ ($\therefore$ 참)
 ② $ac-bd = ac-bc+bc-bd = c(a-b) + b(c-d) > 0$
 $\therefore ac > bd$ ($\therefore$ 참)
 ③ $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} < 0 \quad \therefore \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ($\therefore$ 참)
 ④ $c^2-d^2 = (c+d)(c-d) > 0 \quad \therefore c^2 > d^2$ ($\therefore$ 참)
 ⑤ [반례] $a=6, b=2, c=2, d=1$ 이면
 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ ($\therefore$ 거짓)

067

임의의 실수 a 는 $a > 0, a=0, a < 0$ 중 어느 하나만 성립한다.

- (i) $a > 0$ 이라고 가정하면 $a^2 = a \times a$ 는 양수와 양수의 곱이므로 $a^2 \boxed{>} 0$ 이다.
 (ii) $a=0$ 이라고 가정하면 $a^2 = 0 \times 0 = 0$ 이다.
 (iii) $a < 0$ 이라고 가정하면 $a^2 = a \times a$ 는 음수와 음수의 곱이므로 $a^2 \boxed{>} 0$ 이다.
 (i), (ii), (iii)에서 임의의 실수 a 에 대하여 $a^2 \boxed{\geq} 0$ 이다.

068

(i) 「 $a^2+b^2=0$ 이면 $a=0, b=0$ 이다.」의 증명

a, b 는 실수이므로

$$a^2 \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$b^2 \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \text{의 양변에 } a^2 \text{을 더하면 } a^2+b^2 \geq a^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢} \text{에 의해 } 0 \leq a^2 \leq a^2+b^2$$

$$\text{이때 } a^2+b^2=0 \text{이므로 } a^2=0 \quad \therefore a=0$$

$$\text{같은 방법으로 하면 } b=0$$

$$\text{따라서 } a^2+b^2=0 \text{이면 } a=0, b=0 \text{이다.}$$

(ii) 「 $a=0, b=0$ 이면 $a^2+b^2=0$ 이다.」의 증명

$$a=0, b=0 \text{이면 } a^2=0, b^2=0$$

$$\therefore a^2+b^2=0$$

(i), (ii)에 의해 $a^2+b^2=0$ 이기 위한 필요충분조건은 $a=0, b=0$ 이다.

069

(1) $-1 < x < 4$ 이므로 $x+1 > 0, x-4 < 0, x-7 < 0$

$$\therefore |x+1| - |x-4| - |x-7|$$

$$= x+1 + (x-4) + (x-7)$$

$$= 3x-10$$

(2) $|a| < 2$ 에서 $-2 < a < 2$ 이므로 $a-2 < 0, a+2 > 0$

$$\sqrt{(a-2)^2} = |a-2|, \sqrt{(a+2)^2} = |a+2| \text{ 이므로}$$

$$2\sqrt{(a-2)^2} - (a-2)\sqrt{(a+2)^2} + a|a+2|$$

$$= 2|a-2| - (a-2)|a+2| + a|a+2|$$

$$= -2(a-2) - (a-2)(a+2) + a(a+2)$$

$$= -2a+4 - a^2+4+a^2+2a=8$$

070

a, b 가 실수일 때, $|a|+|b|=0$ 이면 $a=0, b=0$

따라서 $|x-y+1|+|2x-y-1|=0$ 에서 x, y 는 실수이므로

$$x-y+1=0, 2x-y-1=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=2, y=3 \quad \therefore x^2+y^2=2^2+3^2=13$$

071

$x^2+y^2-2x+4y+5=0$ 의 좌변을 완전제곱꼴로 변형하면

$$(x^2-2x+1) + (y^2+4y+4) = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$$

이때 x, y 는 실수이므로

$$x-1=0, y+2=0 \quad \therefore x=1, y=-2$$

$$\therefore xy=1 \cdot (-2) = -2$$

소단원 연습문제

pp. 55~56

001 ①

002 ⑤

003 ②

004 ②

005 ⑤

006 6

007 ⑤

008 -1

009 ①

001

① (짝수)+(짝수)=(짝수), (짝수) $\times$ (짝수)=(짝수)이므로
 짝수 전체의 집합은 덧셈과 곱셈에 대하여 모두 닫혀 있다.

② (홀수)+(홀수)=(짝수)이므로 덧셈에 대하여 닫혀 있지

않지만 (홀수) × (홀수) = (홀수)이므로 홀수 전체의 집합은 곱셈에 대하여 닫혀 있다.

③ 100의 약수의 집합을 A라 하면

$$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$$

이때 $1 \in A$, $2 \in A$ 이지만 $1+2=3 \notin A$ 이므로 100의 약수의 집합은 덧셈에 대하여 닫혀 있지 않다.

또, $2 \in A$, $4 \in A$ 이지만 $2 \times 4 = 8 \notin A$ 이므로 100의 약수의 집합은 곱셈에 대하여도 닫혀 있지 않다.

④ (음의 정수) + (음의 정수) = (음의 정수)이므로 음의 정수 전체의 집합은 덧셈에 대하여 닫혀 있다.

그런데 (음의 정수) × (음의 정수) = (양의 정수)이므로 음의 정수 전체의 집합은 곱셈에 대하여 닫혀 있지 않다.

⑤ 무리수 $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ 에 대하여

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0, \sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$$

는 모두 무리수가 아니므로 무리수 전체의 집합은 덧셈과 곱셈에 대하여 모두 닫혀 있지 않다.

002

연산 *에 대한 항등원을 e라고 하면 임의의 실수 a에 대하여 $a * e = e * a = a$ 이므로 $a * e = a$ 에서

$$ae - 3a - 3e + k = a$$

$$ae - 4a - 3e + k = 0$$

$$\therefore a(e-4) + (k-3e) = 0$$

위의 등식은 임의의 실수 a에 대하여 성립해야 하므로

$$e-4=0, k-3e=0$$

$$\therefore e=4, k=3e=12$$

003

$\boxed{\text{㉠} a \neq 0 \text{이고 } b \neq 0}$ 이라고 가정하면 $ab=0$ 이므로 양변에

a의 곱셈에 대한 $\boxed{\text{㉡} \text{역원}}$ 인 $\frac{1}{a}$ 을 곱하면

$$\frac{1}{a} \cdot ab = \frac{1}{a} \cdot 0 \quad \therefore \boxed{\text{㉢} b=0}$$

또, 양변에 b의 곱셈에 대한 $\boxed{\text{㉡} \text{역원}}$ 인 $\frac{1}{b}$ 을 곱하면

$$\frac{1}{b} \cdot b = \frac{1}{b} \cdot 0 \quad \therefore 1=0$$

따라서 $1=0$ 은 모순이므로 $a=0$ 또는 $b=0$ 이다.

004

ㄱ. [반례] $a=-2$, $b=1$ 이면 $|a| > |b|$ 이지만 $a < b$ 이다. (∴ 거짓)

ㄴ. $|a| > |b| \geq 0$ 이므로

$$|a|^2 > |b|^2 \quad \therefore a^2 > b^2 \quad (\therefore \text{참})$$

ㄷ. [반례] $a=2$, $b=-1$ 이면 $|a| > |b|$ 이지만 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 이다. (∴ 거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ 뿐이다.

005

① 모든 실수의 제곱은 항상 0보다 크거나 같다. (∴ 참)

② $a \geq 0$ 이면 $|a|=a$ 이고, $a < 0$ 이면 $|a| > a$ 이므로 모든 실수 a에 대하여 $|a| \geq a$ 이다. (∴ 참)

③ 실수 a, b에 대하여

$$「a^2+b^2 \neq 0 \text{이면 } a \neq 0 \text{ 또는 } b \neq 0 \text{이다.}」 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

의 대우인

$$「a=0 \text{이고 } b=0 \text{이면 } a^2+b^2=0 \text{이다.}」$$

가 참이므로 명제 ㉠도 참이다. (∴ 참)

④ $a \neq 0$ 이면 $a^2 > 0$ 이므로 $a^2b \geq a^2c$ 이면 $b \geq c$ 이다. (∴ 참)

⑤ [반례] $a=2$, $b=3$ 이면 $|2+3| = |2| + |3|$ 이지만 $2 \times 3 = 6 \neq 0$ 이다. (∴ 거짓)

006

$$\sqrt{(x-2y+1)^2} + \sqrt{(2x-3y)^2} = 0 \text{에서}$$

$$|x-2y+1| + |2x-3y| = 0$$

x, y는 실수이므로

$$x-2y+1=0, 2x-3y=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=2$

$$\therefore xy=2 \times 3=6$$

007

$$a-b > 0 \text{이므로 } a > b \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$\text{또, } |ab| > ab \text{이므로 } ab < 0 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } a > 0, b < 0 \Rightarrow \underbrace{3a-2b}_{>0} > 0$$

$$\therefore \sqrt{(3a-2b)^2} + 3|a| - 2|b|$$

$$= |3a-2b| + 3|a| - 2|b|$$

$$= 3a - 2b + 3a + 2b$$

$$= 6a$$

008

연산 ◦에 대한 항등원을 e라 하면 임의의 실수 a에 대하여

$$a \circ e = e \circ a = a$$

이므로 $a \circ e = a$ 에서

$$(a+1)(e+1) - 1 = a$$

$$ae + a + e + 1 - 1 = a$$

$$\therefore e(a+1) = 0$$

위의 등식은 임의의 실수 a에 대하여 성립해야 하므로

$$e=0$$

따라서 실수 a 의 역원을 x 라 하면 연산 $\circ$ 에 대한 항등원이 0
이므로

$$a \circ x = x \circ a = 0$$

따라서 $a \circ x = 0$ 에서

$$(a+1)(x+1)-1=0$$

$$ax+a+x+1-1=0$$

$$\therefore x(a+1)=-a$$

$$(i) a \neq -1 \text{ 일 때 } x = -\frac{a}{a+1}$$

(ii) $a = -1$ 일 때, $0 \cdot x = 1$ 이므로 이를 만족하는 x 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 연산 $\circ$ 에 대한 역원이 존재하지 않는 실수 a 의 값은 -1 이다.

009

$a > b > c > 0$ 이므로

$$(i) \frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} = \frac{a(b+c)-b(a+c)}{b(b+c)} \\ = \frac{ab+ac-ab-bc}{b(b+c)} \\ = \frac{c(a-b)}{b(b+c)} > 0 \quad (\because a-b > 0)$$

$$\therefore \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$$

$$(ii) \frac{a-c}{b-c} - \frac{a}{b} = \frac{b(a-c)-a(b-c)}{b(b-c)} \\ = \frac{ab-bc-ab+ac}{b(b-c)} \\ = \frac{c(a-b)}{b(b-c)} > 0 \quad (\because a-b > 0, b-c > 0)$$

$$\therefore \frac{a-c}{b-c} > \frac{a}{b}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b} < \frac{a-c}{b-c}$$

04 복소수의 뜻과 연산

개념 확인 문제

p. 58

$$1 (1) -3-4i \quad (2) 2+i \quad (3) 5 \quad (4) 2i$$

$$2 (1) 3-2i \quad (2) 1+i \quad (3) 4+3i \quad (4) \frac{6}{5}$$

1

$$(1) \overline{-3+4i} = -3-4i$$

$$(2) \overline{2-i} = 2+i$$

$$(3) \overline{5} = 5$$

$$(4) \overline{-2i} = 2i$$

2

$$(1) (2+i) + (1-3i) = (2+1) + (1-3)i = 3-2i$$

$$(2) (3-2i) - (2-3i) = 3-2i-2+3i \\ = (3-2) + (-2+3)i = 1+i$$

$$(3) (1+2i)(2-i) = 2-i+4i-2i^2 = 2+3i+2 = 4+3i$$

$$(4) \frac{1+i}{2+i} + \frac{1-i}{2-i} = \frac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} + \frac{(1-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\ = \frac{2-i+2i-i^2}{2^2-i^2} + \frac{2+i-2i-i^2}{2^2-i^2} \\ = \frac{3+i}{5} + \frac{3-i}{5} = \frac{6}{5}$$

유 제

pp. 59~62

072 ⑤

073 ③

074 ③

075 6

076 10

077 10

078 ②

079 $-\frac{1}{3}i$

080 7

081 ③

072

주어진 복소수를 $z = (\text{실수부분}) + (\text{허수부분})i$ 의 꼴로 정리하면

$$z = (x^2-2x-3) + (x+1)i \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 z^2 이 음의 실수이려면 z 는 순허수이어야 한다.

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 (실수부분) = 0, (허수부분) $\neq 0$ 이어야 하므로

$$x^2-2x-3=0, x+1 \neq 0$$

$$\iff (x+1)(x-3)=0, x+1 \neq 0$$

$$\iff (x=-1 \text{ 또는 } x=3) \text{ 이고 } x \neq -1$$

$$\iff x=3$$

073

주어진 복소수를 $z = (\text{실수부분}) + (\text{허수부분})i$ 의 꼴로 정리하면

$$z = (x^2-3x+2) + (x^2-1)i \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 z 가 0이 아닌 실수가 되기 위해서는

$$(\text{실수부분}) \neq 0, (\text{허수부분}) = 0$$

이어야 하므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$x^2-3x+2 \neq 0, x^2-1=0$$

$$\iff (x-1)(x-2) \neq 0, (x+1)(x-1)=0$$

$$\iff (x \neq 1 \text{ 또는 } x \neq 2) \text{ 이고 } (x=-1 \text{ 또는 } x=1)$$

$$\iff x=-1$$

$x=-1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $z=6$

$$\therefore x+z=-1+6=5$$

074

주어진 복소수를 $z=(\text{실수부분})+(\text{허수부분})i$ 의 꼴로 정리하면

$$z=(x-2)+(x^2-5x+6)i \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $z>0$ 이면 z 는 양의 실수를 의미하므로

$$(\text{실수부분})>0, (\text{허수부분})=0$$

이어야 한다. 따라서 $\textcircled{7}$ 에서

$$x-2>0, x^2-5x+6=0$$

$$\iff x>2, (x-2)(x-3)=0$$

$$\iff x>2\text{이고 } (x=2 \text{ 또는 } x=3)$$

$$\iff x=3$$

075

주어진 등식의 좌변을 전개하여 $(\text{실수부분})+(\text{허수부분})i$ 의 꼴로 정리하면

$$(4+4i+i^2)x+(4-4i+i^2)y=15-4i$$

$$(3+4i)x+(3-4i)y=15-4i$$

$$\therefore 3(x+y)+4(x-y)i=15-4i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의해

$$3(x+y)=15, 4(x-y)=-4$$

$$\therefore x+y=5, x-y=-1$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2, y=3$

$$\therefore xy=6$$

076

$\frac{1+2i}{2-i}, \frac{2-i}{1+2i}$ 의 분모를 각각 실수화하면

$$\frac{1+2i}{2-i} = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{5i}{5} = i$$

$$\frac{2-i}{1+2i} = \frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-5i}{5} = -i$$

$$\therefore 3-2i + \frac{1+2i}{2-i} + 3i + \frac{2-i}{1+2i}$$

$$= 3-2i+i+3i+(-i)$$

$$= 3+i$$

$$a=3, b=1\text{이므로 } a^2+b^2=3^2+1^2=10$$

077

복소수 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

이것을 주어진 등식에 대입하여 정리하면

$$(2-i)(a+bi)-i(a-bi)=2+4i$$

$$2a+2bi-ai+b-ai-b=2+4i$$

$$\therefore 2a+2(b-a)i=2+4i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의해

$$2a=2, 2(b-a)=4$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=3$

따라서 $z=1+3i, \bar{z}=1-3i$ 이므로

$$z\bar{z}=(1+3i)(1-3i)=1+9=10$$

078

복소수 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

이것을 주어진 등식에 대입하여 정리하면

$$(1+i)(a+bi)+3i(a-bi)=2+i$$

$$a+bi+ai-b+3ai+3b=2+i$$

$$(a+2b)+(4a+b)i=2+i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의해

$$a+2b=2, 4a+b=1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=0, b=1$

따라서 $z=i, \bar{z}=-i$ 이므로

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{-i}{i} = -1$$

079

z^2 이 음의 실수가 되는 복소수 z 는 순허수이므로

$$z=bi \text{ (} b \text{는 실수)}$$

라 하면 $\bar{z}=-bi$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$$(2+3i)bi+(2-3i)(-bi)=2$$

$$2bi-3b-2bi-3b=2$$

$$-6b=2 \quad \therefore b=-\frac{1}{3} \quad \therefore z=-\frac{1}{3}i$$

080

ㄱ. 복소수 $\alpha=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$$\beta=\bar{\alpha}=a-bi\text{이므로}$$

$$\alpha+\beta=(a+bi)+(a-bi)=2a \Rightarrow \text{실수}$$

$$\alpha\beta=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2 \Rightarrow \text{실수}$$

따라서 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다. ($\therefore$ 참)

ㄴ. [반례] $\alpha=1, \beta=i$ 이면 $\alpha+\beta i=1+i \cdot i=0$ 이지만

$$\alpha+\beta=1+i \neq 0\text{이다. } (\therefore \text{ 거짓})$$

ㄷ. [반례] $\alpha=1, \beta=i$ 이면 $\alpha^2+\beta^2=1^2+i^2=0$ 이지만

$$\alpha \neq 0, \beta \neq 0\text{이다. } (\therefore \text{ 거짓})$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

081

복소수 $\alpha=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{\alpha}=a-bi$

① $\alpha=\bar{\alpha}$ 이므로 $a+bi=a-bi$ 에서

$$b=-b \quad \therefore b=0$$

따라서 $\alpha=a$ 이므로 α 는 실수이다. ($\therefore$ 참)

② α 가 순허수이면 $\alpha = bi (b \neq 0)$

$$\therefore \bar{\alpha} = -bi = -\alpha \quad (\therefore \text{참})$$

③ $\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 = (a+bi)^2 + (a-bi)^2 = 2(a^2 - b^2) = 0$

$$\therefore b = \pm a$$

따라서 $\alpha = a+ai$ 또는 $\alpha = a-ai$ 의 꼴이다. ($\therefore$ 거짓)

④ $a\bar{\alpha} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = 0$

$$\therefore a=0, b=0$$

따라서 $\alpha = 0$ 이다. ($\therefore$ 참)

⑤ $\overline{-\alpha} = -\overline{a+bi} = -a-bi$

$$-\bar{\alpha} = -(a-bi) = -a+bi$$

따라서 임의의 복소수 α 에 대하여 $\overline{-\alpha} = -\bar{\alpha}$ 이다. ($\therefore$ 참)

05 복소수의 연산에 대한 성질

개념 확인 문제

p. 64

$$1 (1) -1 + \sqrt{3}i, \frac{1+\sqrt{3}i}{4} \quad (2) \frac{1-7i}{25}, \frac{-1-7i}{2}$$

$$2 (1) -2\sqrt{3} \quad (2) 2\sqrt{3}i \quad (3) -2i \quad (4) 2$$

1

복소수 z 에 대하여

덧셈에 대한 역원: $-z$, 곱셈에 대한 역원: $\frac{1}{z}$

(1) $1-\sqrt{3}i$ 의 덧셈에 대한 역원은

$$-(1-\sqrt{3}i) = -1 + \sqrt{3}i$$

$1-\sqrt{3}i$ 의 곱셈에 대한 역원은

$$\frac{1}{1-\sqrt{3}i} = \frac{1+\sqrt{3}i}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} = \frac{1+\sqrt{3}i}{4}$$

(2) $\frac{1+i}{3-4i} = \frac{(1+i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-1+7i}{25}$

$$\frac{-1+7i}{25} \text{의 덧셈에 대한 역원은} \quad -\frac{-1+7i}{25} = \frac{1-7i}{25}$$

$\frac{-1+7i}{25}$ 의 곱셈에 대한 역원은

$$\begin{aligned} \frac{25}{-1+7i} &= \frac{25(-1-7i)}{(-1+7i)(-1-7i)} = \frac{25(-1-7i)}{50} \\ &= \frac{-1-7i}{2} \end{aligned}$$

2

(1) $\sqrt{-2}\sqrt{-6} = \sqrt{2i}\sqrt{6i} = \sqrt{12i^2} = -2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2}\sqrt{-6} = \sqrt{2}\sqrt{6i} = \sqrt{12i} = 2\sqrt{3}i$

(3) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}i} = \frac{2i}{i \cdot i} = -2i$

$$(4) \frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}} = \frac{\sqrt{8}i}{\sqrt{2}i} = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2$$

유 제

pp. 64~65

082 (1) 2 (2) 50-50i

083 ②

084 ⑤

085 ⑤

082

(1) $\frac{1+i}{1-i}, \frac{1-i}{1+i}$ 의 분모를 실수화하면

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100} &= i^{100} + (-i)^{100} \\ &= (i^4)^{25} + \{(-i)^4\}^{25} \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

(2) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} &i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \dots + 100i^{100} \\ &= (i - 2 - 3i + 4) + (5i - 6 - 7i + 8) + \dots \\ &\quad + (97i - 98 - 99i + 100) \\ &= (2 - 2i) + (2 - 2i) + \dots + (2 - 2i) \\ &= (2 - 2i) \times 25 = 50 - 50i \end{aligned}$$

083

$a < b$ 이므로 $a - b < 0$

$$\therefore \sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = -(a-b)$$

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로 $a \leq 0, b \leq 0$

이때 $a+b \leq 0$ 이므로 $|a+b| = -(a+b)$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{(a-b)^2} - |a+b| &= -(a-b) + (a+b) \\ &= -a + b + a + b = 2b \end{aligned}$$

084

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로

$$a < 0, b < 0 (\because abc \neq 0)$$

이때 $a+b < 0$ 이므로

$$|a+b| = -(a+b) = -a-b$$

또, $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}}$ 이므로 $b < 0, c > 0 (\because abc \neq 0)$

$$\therefore \sqrt{b^2} = |b| = -b, \sqrt{c^2} = |c| = c$$

$$\begin{aligned} \therefore |a+b| + \sqrt{c^2} - \sqrt{b^2} &= |a+b| + |c| - |b| \\ &= -a-b+c+b \\ &= -a+c \end{aligned}$$

085

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 가 성립하려면 $a \geq 0$, $b < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} = -\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} \text{에서}$$

$$x+2 \geq 0, x-1 < 0$$

$$\therefore -2 \leq x < 1$$

따라서 $x+3 > 0$, $x-2 < 0$ 이므로

$$|x+3| = x+3$$

$$|x-2| = -(x-2) = -x+2$$

$$\begin{aligned} \therefore |x+3| + \sqrt{(x-2)^2} &= |x+3| + |x-2| \\ &= x+3-x+2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

소단원 연습문제

pp. 66~67

001 ②	002 ②	003 ④	004 $-2i$	005 49
006 ⑤	007 ④	008 ④	009 ①	010 ③

001

복소수 $z = a+bi$ 이므로

$$\bar{z} = a-bi$$

이것을 주어진 등식에 대입하여 정리하면

$$(a+bi)(a-bi) + 2[a+bi - (a-bi)] = 4+4i$$

$$a^2+b^2+4bi=4+4i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의해

$$a^2+b^2=4, 4b=4$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = \pm\sqrt{3}$, $b=1$

$$\therefore a^2-b^2 = (\pm\sqrt{3})^2 - 1^2 = 2$$

002

주어진 복소수 z 를 $z = (\text{실수부분}) + (\text{허수부분})i$ 의 꼴로 정리하면

$$z = (x^2-x) + (x^2+x-2)i \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 복소수를 제곱하여 음의 실수가 되는 것은 순허수이다.

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 (실수부분)=0, (허수부분) $\neq 0$ 이어야 하므로

$$x^2-x=0, x^2+x-2 \neq 0$$

$$\iff x(x-1)=0, (x+2)(x-1) \neq 0$$

$$\iff (x=0 \text{ 또는 } x=1) \text{이고, } (x \neq -2 \text{ 또는 } x \neq 1)$$

$$\iff x=0$$

따라서 $x=0$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $z = -2i$ 이므로

$$z^2 = -4$$

003

주어진 식을 정리하면

$$\begin{aligned} a\bar{a} + a\bar{\beta} + \bar{a}\beta + \beta\bar{\beta} &= a(\bar{a} + \bar{\beta}) + \beta(\bar{a} + \bar{\beta}) \\ &= (a+\beta)(\bar{a} + \bar{\beta}) \end{aligned}$$

그런데 $a=2-i$, $\beta=1+3i$ 이므로

$$\begin{cases} a+\beta = 2-i+1+3i = 3+2i \\ \bar{a} + \bar{\beta} = \bar{a} + \bar{\beta} = 3+2i = 3-2i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore a\bar{a} + a\bar{\beta} + \bar{a}\beta + \beta\bar{\beta} &= (a+\beta)(\bar{a} + \bar{\beta}) \\ &= (3+2i)(3-2i) = 13 \end{aligned}$$

004

복소수 z 에 대하여

$$\text{덧셈에 대한 역원: } -z, \text{ 곱셈에 대한 역원: } \frac{1}{z}$$

$$\text{이때 } \frac{i}{1-2i} = \frac{i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-2+i}{5} \text{이므로}$$

$$\frac{-2+i}{5} \text{의 덧셈에 대한 역원 } a \text{는}$$

$$a = -\frac{-2+i}{5} = \frac{2-i}{5}$$

$$\frac{-2+i}{5} \text{의 곱셈에 대한 역원 } b \text{는}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{5}{-2+i} = \frac{5(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} \\ &= \frac{5(-2-i)}{5} = -2-i \end{aligned}$$

$$\therefore 5a+b = 5 \cdot \frac{2-i}{5} + (-2-i) = -2i$$

005

주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned} &\sqrt{-2}\sqrt{-3}\sqrt{-6} + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-2}} \cdot \frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-15}} \\ &= \sqrt{2i} \cdot \sqrt{3i} \cdot \sqrt{6i} + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2i}} \cdot \frac{\sqrt{3i}}{\sqrt{15i}} \\ &= (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6})i^3 + \frac{(\sqrt{10} \cdot \sqrt{3})i}{(\sqrt{2} \cdot \sqrt{15})i^2} \\ &= -6i + (-i) \\ &= -7i \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a=0, b=-7 \text{이므로 } a^2+b^2=0^2+(-7)^2=49$$

006

① $z=1+i$ 라 하면 $z^2=2i$ 이고, z^2 은 허수이므로 대소를 판단할 수 없다. 즉, $z^2 < 0$ 이 성립하려면 z 는 순허수이지 허수는 아니다. ($\therefore$ 거짓)

② $a=1$, $b=i$ 이면 $a+bi=1+(i)i=0$ 이다.

따라서 $a+bi=0$ 일 때 $a=b=0$ 이 성립하려면 a, b 는 실수이어야 한다. ($\therefore$ 거짓)

③ $a=0, b=0$ 이면 $z=0$ 은 실수이므로 복소수 $a+bi$ 가 순허수가 될 조건은 $a=0, b \neq 0$ 이다. ($\therefore$ 거짓)

④ n 이 짝수이므로 $n=2k$ (k 는 자연수)로 놓으면

$$i^n = i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$$

이때 k 가 짝수이면 $i^n = 1$

k 가 홀수이면 $i^n = -1$ ($\therefore$ 거짓)

⑤ 복소수 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로

$$z+\bar{z}=a+bi+(a-bi)=2a$$

따라서 $z+\bar{z}$ 는 항상 실수이다. ($\therefore$ 참)

007

$$x = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \text{에서 } 2x-1 = -\sqrt{3}i$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4x^2 - 4x + 1 = -3$$

$$4x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \therefore x^2 - x + 1 = 0$$

$$\therefore x^3 - x^2 + x + 1 = x(x^2 - x + 1) + 1 = 1$$

008

$\frac{1+i}{1-i}, \frac{1-i}{1+i}$ 의 분모를 각각 실수화하면

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = i^n + (-i)^n = -2$$

i^n 의 순환성에 의해 i^n 과 $(-i)^n$ 은 1, -1, $i, -i$ 중 하나이다.

따라서 $i^n + (-i)^n = -2$ 가 성립하기 위해서는

$$i^n = -1, (-i)^n = -1$$

이어야 하므로

$$n = 4k + 2 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

의 꼴이다. 그런데 보기 중에서 56은 $4k$ 의 꼴이므로

$i^n + (-i)^n = -2$ 를 만족하지 않는다.

009

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{이므로 } a < 0, b < 0 (\because ab \neq 0)$$

$$a > b \text{이므로 } b < a < 0$$

$$\therefore -b > 0, a-b > 0, b-a < 0$$

$$\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b-a}}, \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{b}} \text{를 간단히 하면}$$

$$\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b-a}} = \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{-(b-a)}} = \sqrt{\frac{a-b}{a-b}} \cdot \frac{i}{i^2} = -i$$

$$\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-bi}} = \sqrt{\frac{-b}{-b}} \cdot \frac{i}{i^2} = -i$$

$$\therefore \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b-a}} + \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{b}} = -i - i = -2i$$

010

음이 아닌 정수 k 에 대하여 $i^{4k}=1$ 이므로

$$f(4k+1) = i^{4k+1+1} = i^{4k} \cdot i^2 = -1$$

$$f(4k+2) = 2i^{4k+2} = 2 \cdot i^{4k} \cdot i^2 = -2$$

$$f(4k+3) = i^{4k+3+1} = i^{4(k+1)} = 1$$

$$f(4k+4) = 2i^{4k+4} = 2 \cdot i^{4(k+1)} = 2$$

$$\therefore f(4k+1) + f(4k+2) + f(4k+3) + f(4k+4) = 0$$

이를 이용하여 주어진 식의 값을 구하면

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2008)$$

$$= \{f(1) + f(2) + f(3) + f(4)\}$$

$$+ \{f(5) + f(6) + f(7) + f(8)\}$$

$$+ \dots + \{f(2005) + f(2006) + f(2007) + f(2008)\}$$

$$= (-1 - 2 + 1 + 2) + (-1 - 2 + 1 + 2)$$

$$+ \dots + (-1 - 2 + 1 + 2)$$

$$= 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

중단원 연습문제

pp. 68~70

001 ⑤	002 ③	003 ②	004 ②	005 ①
006 10	007 ③	008 ③	009 -1	010 ④
011 ④	012 12	013 21	014 8	

001

(i) 덧셈: $1+1=2 \notin A$ 이므로 집합 A 는 덧셈에 대하여 닫혀 있지 않다.

(ii) 뺄셈: $1-(-1)=2 \notin A$ 이므로 집합 A 는 뺄셈에 대하여 닫혀 있지 않다.

(iii) 곱셈, 나눗셈: 집합 A 의 임의의 두 원소에 대하여 곱셈과 나눗셈을 한 결과는 다음 표와 같다.

$\times$	-1	1	-i	i
-1	1	-1	i	-i
1	-1	1	-i	i
-i	i	-i	-1	1
i	-i	i	1	-1

$\div$	-1	1	-i	i
-1	1	-1	-i	i
1	-1	1	i	-i
-i	i	-i	1	-1
i	-i	i	-1	1

(세로축의 수) $\div$ (가로축의 수)

위의 표에서 알 수 있듯이 집합 A의 임의의 두 원소에 대하여 곱셈과 나눗셈의 결과가 모두 집합 A의 원소이므로 집합 A는 곱셈과 나눗셈에 대하여 닫혀 있다.

002

- ① 집합 A의 임의의 두 원소를 x, y 라 하면

$$x=m^2, y=n^2 \text{ (단, } m, n \text{은 정수)}$$

$$\therefore m^2 \times n^2 = (mn)^2 \in A$$

이므로 집합 A는 곱셈에 대하여 닫혀 있다.

($\because$ 정수 전체의 집합은 곱셈에 대하여 닫혀 있으므로)
 mn 도 정수이다.

- ② 집합 B의 임의의 두 원소를 x, y 라 하면

$$x=3^m, y=3^n \text{ (단, } m, n \text{은 정수)}$$

$$\therefore 3^m \times 3^n = 3^{m+n} \in B$$

이므로 집합 B는 곱셈에 대하여 닫혀 있다.

($\because$ 정수 전체의 집합은 덧셈에 대하여 닫혀 있으므로)
 $m+n$ 도 정수이다.

- ③ 집합 C의 임의의 두 원소를 x, y 라 하면

$$x=p\sqrt{5}, y=q\sqrt{5} \text{ (단, } p, q \text{는 유리수)}$$

$$\therefore p\sqrt{5} \times q\sqrt{5} = 5pq \notin C$$

이므로 집합 C는 곱셈에 대하여 닫혀 있지 않다.

($\because 5pq = (pq\sqrt{5})\sqrt{5}$ 에서 $pq\sqrt{5}$ 는 유리수가 아니다.)

- ④ 집합 D의 임의의 두 원소를 x, y 라 하면

$$x=\frac{n}{m}, y=\frac{q}{p} \text{ (단, } m, n, p, q \text{는 자연수)}$$

$$\therefore \frac{n}{m} \times \frac{q}{p} = \frac{nq}{mp} \in A$$

이므로 집합 D는 곱셈에 대하여 닫혀 있다.

($\because$ 자연수 전체의 집합은 곱셈에 대하여 닫혀 있으므로)
 nq, mp 는 모두 자연수이다.

- ⑤ 집합 E의 두 원소를 x, y 라 하면

$$x=\frac{3}{2m}, y=\frac{3}{2n} \text{ (단, } m, n \text{은 0이 아닌 유리수)}$$

$$\therefore \frac{3}{2m} \times \frac{3}{2n} = \frac{9}{4mn} = \frac{3}{2\left(\frac{2mn}{3}\right)} \in E$$

이므로 집합 E는 곱셈에 대하여 닫혀 있다.

($\because$ 유리수 전체의 집합은 곱셈에 대하여 닫혀 있으므로)
 $\frac{2mn}{3}$ 도 유리수이다.

003

$x+y$ 와 xy 의 값을 먼저 구해 보면

$$x+y = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = -1$$

$$xy = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) = \frac{4}{4} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{y}{x} + \frac{x}{y} &= \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2-2xy}{xy} \\ &= \frac{(-1)^2-2 \cdot 1}{1} = -1 \end{aligned}$$

004

$\frac{a}{|c|}$ 와 $\frac{b}{|c|}$ 의 대소를 비교하기 위해 두 수의 차를 구하면

$$\frac{a}{|c|} - \frac{b}{|c|} = \frac{a-b}{|c|}$$

그런데 $a \geq b$ 이므로 $a-b \geq 0$ 이고 $c \neq 0$ 이므로

$$|c| \left[\frac{a-b}{|c|} \right] > 0$$

$$\therefore \frac{a}{|c|} - \frac{b}{|c|} = \frac{a-b}{|c|} \geq 0$$

$$\therefore \frac{a}{|c|} \geq \frac{b}{|c|}$$

005

연산 $\odot$ 에 대한 항등원이 e 이므로 임의의 실수 a 에 대하여

$$a \odot e = e \odot a = a$$

이므로 $a \odot e = a$ 에서

$$2(a+e) + ae + 2 = a, a(1+e) + 2(e+1) = 0$$

$$\therefore (a+2)(e+1) = 0$$

이때 위의 등식은 임의의 실수 a 에 대하여 성립해야 하므로

$$e = -1$$

따라서 $x \odot x = e$ 를 만족하는 x 의 값을 구하면

$$2(x+x) + x \cdot x + 2 = -1$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0, (x+1)(x+3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = -3$$

따라서 모든 x 의 값의 합은 $(-1) + (-3) = -4$

006

집합 $A = \{2, 4, 6, 8\}$ 의 임의의 두 원소에 대하여 곱셈을 해 보면 다음 [표 1]과 같고, 이 표를 이용하여 연산 $\triangle$ 의 정의에 의해 집합 A의 임의의 두 원소 a, b 에 대하여 연산한 결과는 다음 [표 2]와 같다.

$\times$	2	4	6	8
2	4	8	12	16
4	8	16	24	32
6	12	24	36	48
8	16	32	48	64

[표 1]

$\triangle$	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

[표 2]

따라서 위의 [표 2]에서

$2\triangle 6=6\triangle 2=2$, $4\triangle 6=6\triangle 4=4$
 $6\triangle 6=6$, $8\triangle 6=6\triangle 8=8$
 이므로 연산 $\triangle$ 에 대한 항등원은 6이다.
 $\therefore x=6$
 또, 연산 $\triangle$ 에 대한 4의 역원을 y 라 하면
 $4\triangle y=y\triangle 4=6$
 이어야 하고 위의 [표 2]에서 $4\triangle 4=6$ 이므로 4의 역원은 4이다. $\therefore y=4$
 $\therefore x+y=6+4=10$

007

복소수 z 를 $z=(\text{실수부분})+(\text{허수부분})i$ 의 꼴로 정리하면
 $z=4-2a+(a-1)i$ ㉠
 (i) $z=\bar{z}$ 를 만족하면 복소수 z 는 실수이므로 (허수부분)=0이다.
 따라서 ㉠에서 $a-1=0$ $\therefore a=1 \Rightarrow a=1$
 (ii) $z=-\bar{z}$ 를 만족하면 복소수 z 는 순허수이므로 (실수부분)=0이다.
 따라서 ㉠에서 $4-2a=0$ $\therefore a=2 \Rightarrow \beta=2$
 (i), (ii)에서 $a=1$, $\beta=2$ 이므로 $a+\beta=3$

008

조건 I, III에서 $a>b>c$ 이고 $a+b+c=0$ 이므로 a , b , c 중 적어도 하나는 0보다 크다.
 $\therefore a>0$ ㉠
 또, II에서 $ab<bc$ 이므로 $b=0$, $b>0$, $b<0$ 인 경우로 나누어 생각해 보면
 (i) $b=0$ 일 때
 $a\cdot 0=0\cdot c$ 이므로 모순이다. $\therefore b\neq 0$
 (ii) $b>0$ 일 때
 $a<c$ 가 되어 $a>b>c$ 에 모순이다.
 따라서 (i), (ii)에 의해 $b<0$ ㉡
 또, $a>b>c$ 에서 $c<b$ 이고, ㉡에서 $b<0$ 이므로
 $c<0$ ㉢
 ㉠, ㉡, ㉢에 의해 $a>0$, $b<0$, $c<0$

009

$a\bar{a}=\beta\bar{\beta}=1$ 이므로 $\bar{a}=\frac{1}{a}$, $\bar{\beta}=\frac{1}{\beta}$
 $\therefore \bar{a}+\bar{\beta}=\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}=\frac{a+\beta}{a\beta}=\frac{2i}{a\beta}$
 그런데 $\bar{a}+\bar{\beta}=\overline{a+\beta}=\overline{2i}=-2i$ 이므로
 $\frac{2i}{a\beta}=-2i$ $\therefore a\beta=-1$

010

$z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$ 이므로
 ㄱ. $1+z+z^2+z^3+\dots+z^{10}$
 $=1+i+i^2+i^3+\dots+i^{10}$
 $=(1+i+i^2+i^3)+i^4(1+i+i^2+i^3)+i^8+i^9+i^{10}$
 $=(1+i-1-i)+1\cdot(1+i-1-i)+1+i-1$
 $=0+0+1+i-1=i$ ($\therefore$ 참)
 ㄴ. $\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\dots+\frac{1}{z^{100}}$
 $=\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\dots+\frac{1}{i^{100}}$
 $=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)$
 $+\dots+\frac{1}{i^{96}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)$
 $=(-i-1+i+1)+1\cdot(-i-1+i+1)+\dots$
 $+1\cdot(-i-1+i+1)$
 $=0\times 25=0$ ($\therefore$ 거짓)
 ㄷ. $z\bar{z}=i\cdot(-i)=1$ 이므로
 $z\bar{z}+(z\bar{z})^2+(z\bar{z})^3+\dots+(z\bar{z})^{2008}=1\times 2008$
 $=2008$ ($\therefore$ 참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

011

0이 아닌 실수 a 에 대하여
 $a>0$ 이면 $\frac{a}{|a|}=\frac{a}{a}=1$
 $a<0$ 이면 $\frac{a}{|a|}=\frac{a}{-a}=-1$
 이므로 a , b , c 의 각 부호에 대하여 x 의 값을 각각 구해 보면
 (i) $a>0$, $b>0$, $c>0$ 일 때, $x=1+1+1+1+1=5$
 (ii) $a>0$, $b>0$, $c<0$ 일 때, $x=1+1-1+1-1=1$
 (iii) $a>0$, $b<0$, $c>0$ 일 때, $x=1-1+1-1-1=-1$
 (iv) $a>0$, $b<0$, $c<0$ 일 때, $x=1-1-1-1+1=-1$
 (v) $a<0$, $b>0$, $c>0$ 일 때, $x=-1+1+1-1-1=-1$
 (vi) $a<0$, $b>0$, $c<0$ 일 때, $x=-1+1-1-1+1=-1$
 (vii) $a<0$, $b<0$, $c>0$ 일 때, $x=-1-1+1+1+1=1$
 (viii) $a<0$, $b<0$, $c<0$ 일 때, $x=-1-1-1+1-1=-3$
 따라서 x 의 값이 될 수 있는 것은 -3 , -1 , 1 , 5 이므로 보기 중 x 의 값이 될 수 없는 것은 ㉢이다.

012

$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ 이므로 A^c , B^c 은
 $A^c=\left\{x\left|\frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{2-x}}\neq\sqrt{\frac{7-x}{2-x}}\right.\right\}$

$$B^c = \{x \mid \sqrt{1-x}\sqrt{x-5} \neq \sqrt{(1-x)(x-5)}\}$$

(i) 집합 A^c 의 원소를 구해 보면

$$\frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{2-x}} \neq \sqrt{\frac{7-x}{2-x}} \text{ 이므로 } \frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{2-x}} = -\sqrt{\frac{7-x}{2-x}}$$

따라서 $7-x \geq 0$, $2-x < 0$ 이므로 $2 < x \leq 7$

$$\therefore A^c = \{3, 4, 5, 6, 7\} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

(ii) 집합 B^c 의 원소를 구해 보면

$$\sqrt{1-x}\sqrt{x-5} \neq \sqrt{(1-x)(x-5)} \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{1-x}\sqrt{x-5} = -\sqrt{(1-x)(x-5)}$$

따라서 $1-x \leq 0$, $x-5 \leq 0$ 이므로 $1 \leq x \leq 5$

$$\therefore B^c = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

(i), (ii)에서

$$A^c \cap B^c = \{3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 5\}$$

이므로 집합 $(A \cup B)^c$ 의 원소의 총합은 $3+4+5=12$

013

x, y 가 실수이고 $(x^2+4x-5)^2+(y^2-y-6)^2=0$ 이 성립하므로

$$x^2+4x-5=0, y^2-y-6=0$$

$$x^2+4x-5=0 \text{에서 } (x+5)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-5 \text{ 또는 } x=1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$y^2-y-6=0 \text{에서 } (y-3)(y+2)=0$$

$$\therefore y=3 \text{ 또는 } y=-2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서

$$(x, y) = (-5, 3), (-5, -2), (1, 3), (1, -2)$$

따라서 각각의 경우에 x^2-y^2 의 값을 구해 보면

(i) $(x, y) = (-5, 3)$ 일 때

$$x^2-y^2 = (-5)^2-3^2=16$$

(ii) $(x, y) = (-5, -2)$ 일 때

$$x^2-y^2 = (-5)^2-(-2)^2=21$$

(iii) $(x, y) = (1, 3)$ 일 때

$$x^2-y^2 = 1^2-3^2=-8$$

(iv) $(x, y) = (1, -2)$ 일 때

$$x^2-y^2 = 1^2-(-2)^2=-3$$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 x^2-y^2 의 최댓값은 21이다.

채점 영역	단계	채점 요소	배점 비율
문제 이해	㉠	실수의 성질 이해하고 식 세우기	20%
해결 과정	㉡	x, y 의 값 구하기	20%
	㉢	(x, y) 의 각 경우에 따라 x^2-y^2 의 값 구하기	40%
답 구하기	㉣	최댓값 구하기	20%

014

복소수 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

이것을 주어진 등식에 대입하여 정리하면

$$(1+i)(a+bi)+i(a-bi)=1+i$$

$$a+ai+bi-b+ai+b=1+i$$

$$\therefore a+(2a+b)i=1+i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의해

$$a=1, 2a+b=1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-1$

$$\therefore z=1-i$$

자연수 n 에 대하여 z^n 의 값을 차례로 구해 보면

$$z^1=1-i$$

$$z^2=(1-i)^2=-2i$$

$$z^3=z^2 \cdot z = (-2i)(1-i) = -2-2i$$

$$z^4=z^3 \cdot z = (-2-2i)(1-i) = -4$$

$\vdots$

이때 $z^4=-4$ 이므로

$$z^8=(z^4)^2=(-4)^2=16$$

따라서 $n=8$ 일 때 z^n 이 최초로 양의 실수가 되므로 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

채점 영역	단계	채점 요소	배점 비율
문제 이해	㉠	복소수 z 를 구하기 위한 식 세우기	20%
해결 과정	㉡	복소수 z 구하기	30%
	㉢	$n=1, 2, 3, \dots$ 인 경우 z^n 의 값 구하기	30%
답 구하기	㉣	최초로 z^n 이 양의 실수가 되는 n 의 값 구하기	20%

사고력 기르기

pp. 71

$$001 -\frac{2}{3}$$

$$002 \textcircled{3}$$

$$003 \textcircled{3}$$

$$004 3$$

001

II에 $a=0$ 을 대입하면

$$(0*b)*c=c*0+(0*c)+(b*c)-2c$$

$$b*c=c*0+c+(b*c)-2c (\because I)$$

$$\therefore c*0=c$$

$\dots\dots \textcircled{㉠}$

또, II에 $c=0$ 을 대입하면

$$(a*b)*0=0*(ab)+(a*0)+(b*0)$$

$$a*b=ab+a+b (\because I, \textcircled{㉠})$$

따라서 연산 $*$ 에 대한 항등원을 e 라 하면 임의의 실수 a 에 대하여

$$a * e = e * a = a$$

이므로 $a * e = a$ 에서

$$ae + a + e = a \quad \therefore e(a+1) = 0$$

위의 등식은 임의의 실수 a 에 대하여 성립해야 하므로

$$e = 0$$

2의 역원을 x 라 하면

$$2 * x = x * 2 = 0$$

이므로 $2 * x = 0$ 에서

$$2x + 2 + x = 0 \quad \therefore x = -\frac{2}{3}$$

따라서 2의 역원은 $-\frac{2}{3}$ 이다.

002

집합 A 의 임의의 부분집합을 B 라 하고, $x \in B$ 인 원소 x 가 홀수라 하면 x^2 은 홀수이므로 $\frac{1}{2}x^2$ 은 정수가 아니다.

따라서 $x \odot x = 2x - \frac{1}{2}x^2 \notin B$ 이므로 부분집합 B 가 홀수 x 를 원소로 가진다면 집합 B 는 연산 $\odot$ 에 대하여 닫혀 있지 않다.

그러므로 구하는 집합은 집합 A 의 원소 중 짝수만으로 만들어진 집합 $\{0, 2, 4\}$ 의 부분집합이다.

(i) 원소를 1개 가지면서 연산 $\odot$ 에 대하여 닫혀 있는 집합을 구해 보면

집합 $\{0\}, \{2\}, \{4\}$ 의 각 원소에 대하여

$$0 \odot 0 = 0 \in \{0\}$$

$$2 \odot 2 = 2 \in \{2\}$$

$$4 \odot 4 = 0 \notin \{4\}$$

이므로 연산 $\odot$ 에 대하여 닫혀 있는 집합은 $\{0\}, \{2\}$ 로 2개이다.

(ii) 원소를 2개 가지면서 연산 $\odot$ 에 대하여 닫혀 있는 집합을 구해 보면

집합 $\{0, 2\}, \{0, 4\}, \{2, 4\}$ 에서

$$0 \odot 2 = 2, 0 \odot 4 = 4$$

$$2 \odot 4 = 2, 4 \odot 4 = 0 \notin \{2, 4\}$$

이므로 연산 $\odot$ 에 대하여 닫혀 있는 집합은 $\{0, 2\}, \{0, 4\}$ 로 2개이다.

(iii) 원소를 3개 가지면서 연산 $\odot$ 에 대하여 닫혀 있는 집합은 $\{0, 2, 4\}$ 로 1개이다.

(i), (ii), (iii)에서 연산 $\odot$ 에 대하여 닫혀 있는 집합 A 의 부분 집합의 개수는 5개이다.

003

$(z-1)^2 < 0$ 이므로 $z-1$ 은 순허수이다.

따라서 $z-1=bi$ ($b \neq 0$ 인 실수)라 하면 $z=1+bi$

$\neg$. $z=1+bi$ 이므로 z 는 순허수일 수 없다. ($\therefore$ 거짓)

$\neg$. $z=1+bi$ 에서 $b=-1$ 이면 $1-i \in A$ 이지만

$$z+i=1 \notin A \quad (\therefore \text{거짓})$$

$\neg$. $z=1+bi$ 이면 $\bar{z}=1-bi$

이때 b 가 0이 아닌 실수이면 $-b$ 도 0이 아닌 실수이므로

$$\bar{z}=1-bi \in A \quad (\therefore \text{참})$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$ 뿐이다.

004

$\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이므로

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}$$

위의 식을 정리하면

$$\frac{z}{1+z^2} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$$z(1+\bar{z}^2) = \bar{z}(1+z^2)$$

$$z + z\bar{z}^2 = \bar{z} + z^2\bar{z}$$

$$z - \bar{z} - z\bar{z}(z - \bar{z}) = 0$$

$$\therefore (z - \bar{z})(z\bar{z} - 1) = 0$$

그런데 z 는 실수가 아닌 복소수이므로

$$z \neq \bar{z}, z\bar{z} - 1 = 0 \quad \therefore z\bar{z} = 1$$

..... ㉠

한편, $\frac{z^2}{1+z}$ 도 실수이므로

$$\frac{z^2}{1+z} = \overline{\left(\frac{z^2}{1+z}\right)}$$

위의 식을 정리하면

$$\frac{z^2}{1+z} = \frac{\bar{z}^2}{1+\bar{z}}$$

$$z^2(1+\bar{z}) = \bar{z}^2(1+z)$$

$$z^2 + z^2\bar{z} = \bar{z}^2 + z\bar{z}^2$$

$$z^2 - \bar{z}^2 + z\bar{z}(z - \bar{z}) = 0$$

$$(z + \bar{z})(z - \bar{z}) + z\bar{z}(z - \bar{z}) = 0$$

$$\therefore (z - \bar{z})(z + \bar{z} + z\bar{z}) = 0$$

그런데 z 는 실수가 아닌 복소수이므로

$$z \neq \bar{z}, z + \bar{z} + z\bar{z} = 0$$

$$\therefore z + \bar{z} = -z\bar{z} = -1 \quad (\because \text{㉠})$$

..... ㉡

$$\therefore (z-1)(\bar{z}-1) = z\bar{z} - (z+\bar{z}) + 1$$

$$= 1 - (-1) + 1$$

$$= 3 \quad (\because \text{㉠, ㉡})$$

1. 다항식

01 다항식과 그 연산

개념 확인 문제

p. 76

1 (1) $2x^5y^8$

(2) $3x^3-6x^2+6x$

(3) $\frac{5}{b}$

(4) $\frac{3a}{4b} + \frac{1}{2}b - \frac{1}{b^2}$

1

(1) $(x^2y^3)^2 \times 2xy^2 = x^4y^6 \times 2xy^2 = 2x^5y^8$

(2) $3x(x^2-2x+2) = 3x^3-6x^2+6x$

(3) $2a^3b \div \frac{2}{5}a^3b^2 = \frac{2a^3b}{\frac{2}{5}a^3b^2} = \frac{5}{b}$

(4) $(3a^3b+2a^2b^3-4a^2) \div (2ab)^2$
 $= \frac{3a^3b+2a^2b^3-4a^2}{4a^2b^2} = \frac{3a}{4b} + \frac{1}{2}b - \frac{1}{b^2}$

유 제

pp. 76~80

086 $12x+4$

087 $x^2-2xy-y^2$

088 (1) $4a^2+b^2+c^2+4ab-2bc-4ac$

(2) $9x^2+4y^2+z^2-12xy+4yz-6xz$

(3) $27a^3+27a^2+9a+1$

(4) $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$

089 (1) $8x^3-1$

(2) $27a^3+8b^3$

(3) x^4+4x^2+16

(4) $81a^4+36a^2b^2+16b^4$

090 -24

091 (1) $a^2-b^2-2bc-c^2$

(2) $x^4+x^3+2x^2+2x+4$

092 (1) $x^4-2x^3-13x^2+14x+24$

(2) $x^4+6x^3+7x^2-6x-8$

093 $4bc-4ac$

094 (1) 90 (2) 850

095 (1) 6 (2) 34

096 (1) 6 (2) -11 097 27

098 24

099 (1) $Q=2x+2, R=-3, 4x^2+2x-5=(2x-1)(2x+2)-3$

(2) $Q=x-2, R=-x+3, 3x^3-6x^2+1=(3x^2+1)(x-2)-x+3$

100 x^3+2 101 $2x-1$

086

$A-(B-2C)$

$=A-B+2C$

$=(x^2+4x-3)-(5x^2-2x+1)+2(2x^2+3x+4)$

$=x^2+4x-3-5x^2+2x-1+4x^2+6x+8$

$=12x+4$

087

$2(X+A)=B$ 에서 $X=-A+\frac{1}{2}B$

$\therefore X=-(x^2-xy+2y^2)+\frac{1}{2}(4x^2-6xy+2y^2)$

$=-x^2+xy-2y^2+2x^2-3xy+y^2$

$=x^2-2xy-y^2$

088

(1) $(2a+b-c)^2$

$=(2a)^2+b^2+(-c)^2+2(2a)b+2b(-c)+2(2a)(-c)$
 $=4a^2+b^2+c^2+4ab-2bc-4ac$

(2) $(3x-2y-z)^2$

$=(3x)^2+(-2y)^2+(-z)^2+2(3x)(-2y)$
 $+2(-2y)(-z)+2(3x)(-z)$
 $=9x^2+4y^2+z^2-12xy+4yz-6xz$

(3) $(3a+1)^3=(3a)^3+3 \cdot (3a)^2 \cdot 1+3 \cdot (3a) \cdot 1^2+1^3$

$=27a^3+27a^2+9a+1$

(4) $(2x-3y)^3=(2x)^3-3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2-(3y)^3$

$=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$

089

(1) $(2x-1)(4x^2+2x+1)=(2x-1)\{(2x)^2+(2x) \cdot 1+1^2\}$
 $=(2x)^3-1^3=8x^3-1$

(2) $(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$

$=(3a+2b)\{(3a)^2-3a \cdot 2b+(2b)^2\}$
 $=(3a)^3+(2b)^3=27a^3+8b^3$

(3) $(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$

$=(x^2-2 \cdot x+2^2)(x^2+2 \cdot x+2^2)$
 $=x^4+2^2 \cdot x^2+2^4$
 $=x^4+4x^2+16$

(4) $(9a^2+6ab+4b^2)(9a^2-6ab+4b^2)$

$=\{(3a)^2+3a \cdot 2b+(2b)^2\}\{(3a)^2-3a \cdot 2b+(2b)^2\}$
 $=(3a)^4+(3a)^2 \cdot (2b)^2+(2b)^4$
 $=81a^4+36a^2b^2+16b^4$

090

다항식 $\frac{(x^3-5x^2+4x-3)}{=A} \frac{(4x^2+4x+1)}{=B}$ 에서 사차항은

(i) (다항식 A의 삼차항) $\times$ (다항식 B의 일차항)

$\Rightarrow x^3 \times 4x = 4x^4$

(ii) (다항식 A의 이차항) $\times$ (다항식 B의 이차항)

$\Rightarrow (-5x^2) \times 4x^2 = -20x^4$

(i), (ii)에 의해 $a = (x^4 \text{의 계수}) = 4 - 20 = -16$
 다항식 $(x^3 - 5x^2 + 4x - 3) \quad (4x^2 + 4x + 1)$ 에서 일차항은
 $\quad \quad \quad = A \quad \quad \quad = B$

(i) (다항식 A의 일차항) $\times$ (다항식 B의 상수항)

$$\Rightarrow 4x \times 1 = 4x$$

(ii) (다항식 A의 상수항) $\times$ (다항식 B의 일차항)

$$\Rightarrow (-3) \times 4x = -12x$$

(i), (ii)에 의해

$$b = (x \text{의 계수}) = 4 - 12 = -8$$

$$\therefore a + b = (-16) + (-8) = -24$$

091

(1) $(a+b+c)(a-b-c) = \{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}$ 에서
 $b+c=X$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} \{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\} &= (a+X)(a-X) = a^2 - X^2 \\ &= a^2 - (b+c)^2 \\ &= a^2 - (b^2 + 2bc + c^2) \\ &= a^2 - b^2 - 2bc - c^2 \end{aligned}$$

(2) $x^2+2=X$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} (x^2+2x+2)(x^2-x+2) &= (X+2x)(X-x) \\ &= X^2 + xX - 2x^2 \\ &= (x^2+2)^2 + x(x^2+2) - 2x^2 \\ &= x^4 + 4x^2 + 4 + x^3 + 2x - 2x^2 \\ &= x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

092

(1) 상수항의 합이 같도록 두 개씩 짝을 지어 전개하면

$$\begin{aligned} (x+1)(x-2)(x+3)(x-4) \\ &= \{(x+1)(x-2)\}\{(x+3)(x-4)\} \\ &= (x^2-x-2)(x^2-x-12) \end{aligned}$$

$x^2-x=X$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} (X-2)(X-12) \\ &= X^2 - 14X + 24 \\ &= (x^2-x)^2 - 14(x^2-x) + 24 \\ &= x^4 - 2x^3 + x^2 - 14x^2 + 14x + 24 \\ &= x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 \end{aligned}$$

(2) 상수항의 합이 같도록 두 개씩 짝을 지어 전개하면

$$\begin{aligned} (x+1)(x-1)(x+2)(x+4) \\ &= \{(x+1)(x+2)\}\{(x-1)(x+4)\} \\ &= (x^2+3x+2)(x^2+3x-4) \end{aligned}$$

$x^2+3x=X$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} (X+2)(X-4) \\ &= X^2 - 2X - 8 \\ &= (x^2+3x)^2 - 2(x^2+3x) - 8 \end{aligned}$$

$$= x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 2x^2 - 6x - 8$$

$$= x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$$

093

$b+c=a=X$, $c+a-b=Y$ 로 치환하면

$$X+Y=2c, \quad X-Y=2(b-a)$$

$$\begin{aligned} (b+c-a)^2 - (c+a-b)^2 &= X^2 - Y^2 = (X+Y)(X-Y) \\ &= 2c \cdot 2(b-a) = 4bc - 4ac \end{aligned}$$

094

$a+b=10$, $ab=5$ 이므로

$$(1) a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 10^2 - 2 \cdot 5 = 90$$

$$(2) a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 10^3 - 3 \cdot 5 \cdot 10 = 850$$

095

(1) 곱셈 공식 $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ 에서

$$2^3 = 14 + 3xy \cdot 2 \quad \therefore xy = -1$$

$$\therefore x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \cdot (-1) = 6$$

(2) $(x^2+y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ 이므로

$$\begin{aligned} x^4+y^4 &= (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 \\ &= 6^2 - 2 \cdot (-1)^2 \quad (\because (1)) \\ &= 34 \end{aligned}$$

096

$a+b+c=2$, $ab+bc+ca=-1$, $abc=3$ 이므로

$$(1) a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$$

$$= 2^2 - 2 \cdot (-1) = 6$$

$$(2) (ab+bc+ca)^2 = a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2+2abc(a+b+c)$$

이므로

$$\begin{aligned} a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2 &= (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c) \\ &= (-1)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 = -11 \end{aligned}$$

097

곱셈 공식 $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ 에서

$$3^2 = 5 + 2(xy+yz+zx) \quad \therefore xy+yz+zx = 2$$

$$\therefore x^3+y^3+z^3$$

$$= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + 3xyz$$

$$= 3 \cdot (5-2) + 3 \cdot 6 = 27$$

098

길넓이를 S라 하면 $S=2(xy+yz+zx)$

모든 모서리의 길이의 합이 28이므로

$$4(x+y+z)=28 \quad \therefore x+y+z=7$$

대각선 $\overline{AG}$ 의 길이가 5이므로

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=5 \quad \therefore x^2+y^2+z^2=25$$

한편, 곱셈 공식에 의해

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

$$7^2=25+2(xy+yz+zx)$$

$$\therefore xy+yz+zx=12$$

$$\therefore S=2(xy+yz+zx)=2 \cdot 12=24$$

099

$$\begin{array}{r} 2x+2 \\ (1) \ 2x-1 \overline{) 4x^2+2x-5} \\ \underline{4x^2-2x} \\ 4x-5 \\ \underline{4x-2} \\ -3 \end{array}$$

$$\therefore Q=2x+2, R=-3$$

$$\therefore 4x^2+2x-5=(2x-1)(2x+2)-3$$

$$\begin{array}{r} x-2 \\ (2) \ 3x^2+1 \overline{) 3x^3-6x^2+1} \\ \underline{3x^3+x} \\ -6x^2-x+1 \\ \underline{-6x^2-2} \\ -x+3 \end{array}$$

$$\therefore Q=x-2, R=-x+3$$

$$\therefore 3x^3-6x^2+1=(3x^2+1)(x-2)-x+3$$

100

다항식 A를 $x-1$ 로 나눈 몫이 x^2+x+1 , 나머지가 3이므로

$$A=(x-1)(x^2+x+1)+3=x^3+2$$

101

다항식 $8x^3-3$ 을 다항식 B로 나눈 몫이 $4x^2+2x+1$, 나머지가 -2 이므로

$$8x^3-3=B(4x^2+2x+1)-2$$

$$\therefore B=(8x^3-1) \div (4x^2+2x+1)$$

$$\begin{array}{r} 2x-1 \\ 4x^2+2x+1 \overline{) 8x^3-1} \\ \underline{8x^3+4x^2+2x} \\ -4x^2-2x-1 \\ \underline{-4x^2-2x-1} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore B=2x-1$$

소단원 연습문제

p. 81

001 14
006 6

002 ⑤

003 1

004 18

005 1

001

다항식 (x^2+2x+3) (x^2+2x+3)에서 삼차항은
 $\quad \quad \quad =A \quad \quad \quad =B$

(i) (다항식 A의 이차항) $\times$ (다항식 B의 일차항)

$$\Rightarrow x^2 \times 2x = 2x^3$$

(ii) (다항식 A의 일차항) $\times$ (다항식 B의 이차항)

$$\Rightarrow 2x \times x^2 = 2x^3$$

(i), (ii)에 의해 $a=(x^3\text{의 계수})=2+2=4$

다항식 (x^2+2x+3) (x^2+2x+3)에서 이차항은
 $\quad \quad \quad =A \quad \quad \quad =B$

(i) (다항식 A의 이차항) $\times$ (다항식 B의 상수항)

$$\Rightarrow x^2 \times 3 = 3x^2$$

(ii) (다항식 A의 일차항) $\times$ (다항식 B의 일차항)

$$\Rightarrow 2x \times 2x = 4x^2$$

(iii) (다항식 A의 상수항) $\times$ (다항식 B의 이차항)

$$\Rightarrow 3 \times x^2 = 3x^2$$

(i), (ii), (iii)에 의해 $b=(x^2\text{의 계수})=3+4+3=10$

$$\therefore a+b=4+10=14$$

002

$$\textcircled{1} (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$$

$$=(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)$$

$$=(1-x^4)(1+x^4)=1-x^8 (\therefore \text{거짓})$$

$$\textcircled{2} (x-y-z)^2=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz (\therefore \text{거짓})$$

$$\textcircled{3} (x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1 (\therefore \text{거짓})$$

$$\textcircled{4} (x+1)(x^2-x+1)=x^3+1 (\therefore \text{거짓})$$

$$\textcircled{5} (x^2-x+1)(x^2+x+1)=x^4+x^2+1 (\therefore \text{참})$$

003

$x+y$, xy 의 값을 구하면

$$x+y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}=1$$

$$xy=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \times \frac{1-\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore x^3+y^3+3xy=(x+y)^3-3xy(x+y)+3xy$$

$$=1^3-3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1+3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=1+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=1$$

004

직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x , y 라 하면

$$x+y=10, x^2+y^2=8^2$$

또, $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ 이므로

$$10^2=8^2+2xy \quad \therefore xy=18$$

$\therefore$ (직사각형의 넓이) $=xy=18$

005

a=2008이라 하면

$$\frac{2009(2008^2-2007)-1}{2008^3} = \frac{(a+1)(a^2-a+1)-1}{a^3}$$

$$= \frac{(a^3+1)-1}{a^3} = \frac{a^3}{a^3} = 1$$

006

조건에 의해

$$f(1)=a+b+c=1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$f(2)=a^2+b^2+c^2=5 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$f(-1)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

곱셈 공식 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에서

$$1^2=5+2(ab+bc+ca) \quad (\because \textcircled{A}, \textcircled{B})$$

$$\therefore ab+bc+ca=-2 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

㉠에서

$$\frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{-2}{abc} = 2 \quad (\because \textcircled{D})$$

$$\therefore abc=-1 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

또, $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$ 이므로

$$(-2)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2 \cdot (-1) \cdot 1 \quad (\because \textcircled{A}, \textcircled{D}, \textcircled{E})$$

$$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=6 \quad \dots\dots \textcircled{F}$$

$$\therefore f(-2)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}$$

$$=\frac{6}{(-1)^2}=6 \quad (\because \textcircled{D}, \textcircled{E})$$

02 항등식과 나머지정리

유 제

pp. 84~88

102 (1) $a=2, b=-3, c=6$ (2) $a=1, b=1, c=-2$

103 16 104 8 105 1

106 (1) $a=1, b=3, c=1$ (2) $a=8, b=3, c=-2$

107 2 108 $-3x+6$ 109 5 110 30

111 5 112 $a=1, b=-2$ 113 -3

114 (1) 몫: $3x^2+x-2$, 나머지: -1

(2) 몫: $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}$, 나머지: $\frac{5}{8}$

115 ③ 116 $a=1, b=3, c=6, d=-10$

102

(1) 좌변을 전개하여 정리하면

$$ax^2+(2a+b)x+a+b+c=2x^2+x+5$$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$$a=2, 2a+b=1, a+b+c=5$$

$$\therefore a=2, b=-3, c=6$$

(2) 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$$a+b+c=0, 3a+5b+4c=0, 2a+6b+3c=2$$

$$\therefore a=1, b=1, c=-2$$

103

주어진 식을 x, y, z에 대하여 정리하면

$$(a-b)x+(a+b-c)y+(c-4)z=0$$

이 식이 x, y, z에 대한 항등식이므로

$$a-b=0, a+b-c=0, c-4=0$$

$$\therefore a=2, b=2, c=4$$

$$\therefore abc=2 \cdot 2 \cdot 4=16$$

104

$x+y=1$ 이므로 $y=1-x$ 를 $ax^2+bxy+cy^2=2$ 에 대입하면

$$ax^2+bx(1-x)+c(1-x)^2=2$$

$$(a-b+c)x^2+(b-2c)x+c=2$$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$$a-b+c=0, b-2c=0, c=2$$

$$\therefore a=2, b=4, c=2$$

$$\therefore a+b+c=2+4+2=8$$

105

주어진 식이 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입하여도 성립한다.

$x=0$ 을 대입하면 $2=-b \quad \therefore b=-2$

$x=1$ 을 대입하면 $0=2a \quad \therefore a=0$

$x=-1$ 을 대입하면 $6=2c \quad \therefore c=3$

$$\therefore a+b+c=0+(-2)+3=1$$

106

(1) 주어진 식이 x에 대한 항등식이므로

$x=1$ 을 대입하면 $c=1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$

$x=2$ 를 대입하면 $b+c=4 \quad \dots\dots \textcircled{B}$

$x=0$ 을 대입하면 $2a-b+c=0 \quad \dots\dots \textcircled{C}$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하면 $a=1, b=3, c=1$

(2) 주어진 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$x=0\text{을 대입하면 } 4=-2c \quad \therefore c=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$x=1$ 을 대입하면

$$1-a+4=-b \quad \therefore a-b=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$x=2$ 를 대입하면

$$4-2a+4=4c \quad \therefore a+2c=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}\text{을 연립하면 } a=8, b=3, c=-2$$

107

주어진 식이 x 에 대한 항등식이므로

$x=1$ 을 대입하면

$$0=1+a+b+2 \quad \therefore a+b=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$x=-1$ 을 대입하면

$$0=-1+a-b+2 \quad \therefore a-b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}\text{을 연립하면 } a=-2, b=-1$$

$$\therefore ab=(-2) \cdot (-1)=2$$

108

$g(x)$ 를 $x-1$, $x-3$ 로 나누었을 때의 나머지가 각각 3, -3 이므로 나머지정리에 의해

$$g(1)=3, g(3)=-3$$

또, $g(x)$ 를 나누는 식 $(x-1)(x-3)$ 이 이차식이므로 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하고, 몫을 $Q(x)$ 라 하면 $g(x)=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$

$$g(1)=3\text{에서 } g(1)=a+b=3$$

$$g(3)=-3\text{에서 } g(3)=3a+b=-3$$

$$\text{두 식을 연립하면 } a=-3, b=6$$

$$\therefore R(x)=-3x+6$$

109

$f(x)=x^2+ax+b$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 1, $x-2$ 로 나눈 나머지는 2이므로 나머지정리에 의해

$$f(1)=1, f(2)=2$$

$$f(1)=1\text{에서 } f(1)=1+a+b=1$$

$$\therefore a+b=0$$

$$f(2)=2\text{에서 } f(2)=4+2a+b=2$$

$$\therefore 2a+b=-2$$

$$\text{두 식을 연립하면 } a=-2, b=2$$

$$\therefore f(x)=x^2-2x+2$$

따라서 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나눈 나머지는 $f(3)$ 이므로

$$f(3)=3^2-2 \cdot 3+2=5$$

110

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누면 몫은 $Q(x)$, 나머지는 5이므로

$$f(x)=(x-2)Q(x)+5$$

또, $Q(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지는 3이므로 나머지정리에 의해 $Q(-3)=3$

$$\therefore f(-3)=(-3-2)Q(-3)+5$$

$$=(-5) \cdot 3+5=-10$$

이때 $xf(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지는 $(-3) \cdot f(-3)$ 이므로

$$(-3) \cdot f(-3)=(-3) \cdot (-10)=30$$

111

$f(x)=x^3+ax^2+bx+5$ 가 $x-1$ 과 $x+1$ 을 모두 인수로 가지므로 인수정리에 의해

$$f(1)=0, f(-1)=0$$

$$f(1)=0\text{에서 } f(1)=1+a+b+5=0$$

$$\therefore a+b=-6$$

$$f(-1)=0\text{에서 } f(-1)=-1+a-b+5=0$$

$$\therefore a-b=-4$$

$$\text{두 식을 연립하면 } a=-5, b=-1$$

$$\therefore ab=(-5) \cdot (-1)=5$$

112

x^4+ax^2+b 가 x^2+2 를 인수로 가지고 $x-1$ 로 나누어 떨어지므로 인수정리에 의해

$$x^4+ax^2+b=(x^2+2)(x-1)Q(x)$$

$x=1$ 을 대입하면

$$1+a+b=0 \quad \therefore a+b=-1$$

$x^2=-2$ 를 대입하면

$$4-2a+b=0 \quad \therefore 2a-b=4$$

$$\text{두 식을 연립하면 } a=1, b=-2$$

113

$f(x)+2$, $xf(x)+2$ 가 모두 일차식 $x-a$ 로 나누어 떨어지므로 인수정리에 의해

$$f(a)+2=0 \cdots \textcircled{㉠}, af(a)+2=0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}\text{에서 } f(a)=-2\text{이므로 이것을 } \textcircled{㉡}\text{에 대입하면}$$

$$a \cdot (-2)+2=0 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore f(1)=-2 (\because \textcircled{㉠})$$

이때 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 이므로

$$f(1)=1+a+b+c=-2 \quad \therefore a+b+c=-3$$

114

(1) 나누는 다항식 $x+2=0$ 을 만족하는 x 의 값이 -2 이므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 3 & 7 & 0 & -5 \\ & & -6 & -2 & 4 \\ \hline & 3 & 1 & -2 & -1 \end{array}$$

$$3x^3+7x^2-5=(x+2)(3x^2+x-2)-1$$

$$\therefore \text{몫} : 3x^2+x-2, \text{나머지} : -1$$

(2) 나누는 다항식 $2x-3=2\left(x-\frac{3}{2}\right)$ 이므로 먼저 $x-\frac{3}{2}$ 으

로 나눈 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{3}{2} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{8} \\ \hline & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}$$

$$\therefore x^3-x^2-x+1=\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{8}$$

$$\therefore \text{몫} : x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}, \text{나머지} : -\frac{5}{8}$$

따라서 $2\left(x-\frac{3}{2}\right)$ 으로 나눈 몫과 나머지는 각각

$$\text{몫} : \left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right) \div 2 = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}$$

$$\text{나머지} : \frac{5}{8}$$

115

다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x+\frac{5}{2}$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$f(x)=\left(x+\frac{5}{2}\right)Q(x)+R$$

$$=(2x+5) \cdot \frac{1}{2}Q(x)+R$$

따라서 $f(x)$ 를 일차식 $2x+5$ 로 나눈 몫과 나머지는

$$\text{몫} : \frac{1}{2}Q(x), \text{나머지} : R$$

116

a, b, c, d 의 값은 다항식 $x^3+3x-14$ 를 $x-1$ 로 연속하여 나누었을 때의 나머지이므로 조립제법을 연속으로 이용하여 계산하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 3 & -14 \\ & & 1 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 & -10 \quad \blacktriangleleft d \\ & & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 6 \quad \blacktriangleleft c \\ & & 1 & \\ \hline a \blacktriangleright 1 & 3 & \blacktriangleleft b \end{array}$$

위의 조립제법을 이용하여 $x^3+3x-14$ 를 변형하면

$$\begin{aligned} & x^3+3x-14 \\ &= (x-1)(x^2+x+4)-10 \\ &= (x-1)\{(x-1)(x+2)+6\}-10 \\ &= (x-1)[(x-1)\{(x-1) \cdot 1+3\}+6]-10 \\ &= (x-1)\{(x-1)^2+3(x-1)+6\}-10 \\ &= (x-1)^3+3(x-1)^2+6(x-1)-10 \\ &= a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d \\ &\therefore a=1, b=3, c=6, d=-10 \end{aligned}$$

소단원 연습문제

p. 89

001 15	002 $\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$	003 ④	004 ④
005 -9			

001

주어진 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$x=1\text{을 대입하면} \quad 2=c$$

$$x=2\text{를 대입하면} \quad 9=b+c \quad \therefore b=7$$

$$x=3\text{을 대입하면} \quad 28=2a+2b+c \quad \therefore a=6$$

$$\therefore a+b+c=6+7+2=15$$

002

다항식 $f(x)$ 가 $x+2$ 로 나누어 떨어지므로 인수정리에 의해

$$f(-2)=0$$

또, 다항식 $f(x)$ 가 $x-3$ 으로 나누면 나머지가 1이므로 나머지정리에 의해 $f(3)=1$

다항식 $f(x)$ 를 나누는 식 $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$ 이 이차식이므로 나머지를 $ax+b$ 라 하고 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x)=(x^2-x-6)Q(x)+ax+b$$

$$f(-2)=0\text{에서} \quad f(-2)=-2a+b=0$$

$$f(3)=1\text{에서} \quad f(3)=3a+b=1$$

$$\text{두 식을 연립하면} \quad a=\frac{1}{5}, b=\frac{2}{5}$$

$$\text{따라서 구하는 나머지는} \quad \frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$$

003

$f(x)+g(x)$ 가 일차식 $x-1$ 로 나누어 떨어지므로 인수정리에 의해 $f(1)+g(1)=0$ ㉠

또, $f(x)-g(x)$ 가 일차식 $x-1$ 로 나누면 나머지가 2이므로 나머지정리에 의해 $f(1)-g(1)=2$ ㉡

$$\text{㉠, ㉡을 연립하면} \quad f(1)=1, g(1)=-1$$

한편, 다항식 $h(x)$ 가 일차식 $x-1$ 로 나누어 떨어지면

$$h(1)=0 \text{이므로}$$

㉠. $h(x)=x+f(x)$ 라 할 때,

$$h(1)=1+f(1)=2$$

㉡. $h(x)=x+g(x)$ 라 할 때,

$$h(1)=1+g(1)=1+(-1)=0$$

㉢. $h(x)=f(x)g(x)+1$ 이라 할 때

$$h(1)=f(1)g(1)+1=(-1)+1=0$$

따라서 보기의 다항식 중 $x-1$ 로 나누어 떨어지는 것은 ㉡, ㉢이다.

004

주어진 식이 x 에 대한 항등식이므로

$x=1$ 을 대입하면

$$0=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$x=-1$ 을 대입하면

$$(-4)^{10}=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{20} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}+\textcircled{㉡} \text{에서} \quad 2^{20}=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20})$$

$$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}=2^{19}$$

005

주어진 식이 x 에 대한 항등식이므로

$x=-1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} (-1)^2 \cdot f(-1) + f(3) &= 2 \cdot (-1) - (-1)^4 \\ \therefore f(-1) + f(3) &= -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=3 \text{을 대입하면} \quad 3^2 f(3) + f(-1) &= 2 \cdot 3 - 3^4 \\ \therefore 9f(3) + f(-1) &= -75 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

$$\textcircled{㉡}-\textcircled{㉠} \text{에서} \quad 8f(3)=-72 \quad \therefore f(3)=-9$$

03 인수분해

개념 확인 문제

p. 91

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1 (1) $x(2-x+y)$ | (2) $(1-a)(1-b)$ |
| (3) $(2a+b)^2$ | (4) $(4x-3y)^2$ |
| 2 (1) $(x+3y)(x-3y)$ | (2) $3(x+2y)(x-2y)$ |
| (3) $a(a+b)(a-b)$ | (4) $(x+y+2)(x+y-2)$ |
| 3 (1) $(x-6)(x+3)$ | (2) $(x-4y)(x+2y)$ |
| (3) $(2x-1)(x-1)$ | (4) $(3a+2b)(a-b)$ |

1

- (1) $2x-x^2+xy=x(2-x+y)$
 (2) $1-a-b+ab=(1-a)-b(1-a)=(1-a)(1-b)$

$$(3) 4a^2+4ab+b^2=(2a+b)^2$$

$$(4) 16x^2-24xy+9y^2=(4x-3y)^2$$

2

$$(1) x^2-9y^2=(x+3y)(x-3y)$$

$$(2) 3x^2-12y^2=3(x^2-4y^2)=3(x+2y)(x-2y)$$

$$(3) a^3-ab^2=a(a^2-b^2)=a(a+b)(a-b)$$

$$(4) (x+y)^2-4=(x+y)^2-2^2=(x+y+2)(x+y-2)$$

3

$$(1) x^2-3x-18=(x-6)(x+3)$$

$$(2) x^2-2xy-8y^2=(x-4y)(x+2y)$$

$$(3) 2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1)$$

$$(4) 3a^2-ab-2b^2=(3a+2b)(a-b)$$

유 제

pp. 92~96

- 117 (1) $(a+2b+3c)^2$ (2) $(x+2y-2)^2$
 (3) $(x-3)^3$ (4) $(3a-2b)^3$
 118 (1) $a(a+2)(a^2-2a+4)$ (2) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$
 (3) $(x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+y+x)$
 (4) $(a^2+2ab+4b^2)(a^2-2ab+4b^2)$
 119 (1) $(2x+1+y)(2x+1-y)$
 (2) $(a-2b+c)(a-2b-c)$
 120 18
 121 (1) $(2a+2b-1)(a+b-2)$
 (2) $(x-3)(x+1)(x-1)^2$
 122 (1) $x(x+2)(x^2+2x-11)$ (2) $(x^2-2)^2$
 123 $2x^2+6x-2$
 124 (1) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$
 (2) $(x+2)(x-2)(x^2+2)$
 (3) $(a^2+3b^2)(a+2b)(a-2b)$
 (4) $(a+2b)(a-2b)(a+b)(a-b)$
 125 (1) $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$
 (2) $(x^2+x+3)(x^2-x+3)$
 (3) $(2x^2+xy+y^2)(2x^2-xy+y^2)$
 (4) $(x^4+2x^2y^2+2y^4)(x^4-2x^2y^2+2y^4)$
 126 -6
 127 (1) $(x-y-1)(x^2+x-y+1)$
 (2) $3(x-y)(y-z)(z-x)$
 128 (1) $(x+3y-1)(x+y-2)$
 (2) $(2x-y+3)(x+y-1)$
 129 ⑤
 130 (1) $(x+1)(x^2-2x+2)$ (2) $(x-2)(x+2)(x+3)$
 131 (1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x-3)$
 (2) $(x+1)(x-2)(x+2)(2x+1)$
 132 $k=6, (2x-1)(3x-2)(2x+3)$

117

- (1) $a^2+4b^2+9c^2+4ab+12bc+6ca$
 $=a^2+(2b)^2+(3c)^2+2\cdot a\cdot 2b+2\cdot 2b\cdot 3c+2\cdot a\cdot 3c$
 $=(a+2b+3c)^2$
- (2) $x^2+4y^2+4+4xy-4x-8y$
 $=x^2+(2y)^2+(-2)^2+2\cdot x\cdot 2y+2\cdot x\cdot (-2)+2\cdot 2y\cdot (-2)$
 $=(x+2y-2)^2$
- (3) $x^3-9x^2+27x-27$
 $=x^3-3x^2\cdot 3+3x\cdot 3^2-3^3$
 $=(x-3)^3$
- (4) $27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$
 $=(3a)^3-3(3a)^2(2b)+3(3a)(2b)^2-(2b)^3$
 $=(3a-2b)^3$

118

- (1) $a^4+8a=a(a^3+2^3)=a(a+2)(a^2-2a+4)$
- (2) $8x^3-27=(2x)^3-3^3=(2x-3)(4x^2+6x+9)$
- (3) $x^3+y^3+3xy-1$
 $=x^3+y^3+(-1)^3-3\cdot x\cdot y\cdot (-1)$
 $=(x+y-1)(x^2+y^2+(-1)^2-xy+y+x)$
 $=(x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+y+x)$
- (4) $a^4+4a^3b^2+16b^4=a^4+a^2(2b)^2+(2b)^4$
 $=(a^2+2ab+4b^2)(a^2-2ab+4b^2)$

119

- (1) $4x^2+4x+1-y^2=(4x^2+4x+1)-y^2$
 $=(2x+1)^2-y^2$
 $=(2x+1+y)(2x+1-y)$
- (2) $a^2+4b^2-c^2-4ab=(a^2-4ab+4b^2)-c^2$
 $=(a-2b)^2-c^2$
 $=(a-2b+c)(a-2b-c)$

120

$a+b+c=0$, $abc=6$ 이므로 인수분해 공식에 의해
 $a^3+b^3+c^3-3abc$
 $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
 이때 $a+b+c=0$ 이므로
 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$
 $\therefore a^3+b^3+c^3=3abc=3\cdot 6=18$

121

- (1) $a+b=A$ 로 치환하여 인수분해하면
 $2A^2-5A+2=(2A-1)(A-2)$
 $=(2a+2b-1)(a+b-2)$

- (2) $x^2-2x=X$ 로 치환하여 인수분해하면

$$\begin{aligned} X^2-2X-3 &= (X-3)(X+1) \\ &= (x^2-2x-3)(x^2-2x+1) \\ &= (x-3)(x+1)(x-1)^2 \end{aligned}$$

122

- (1) 마지막 항이 상수이므로 두 일차식의 상수항의 합이 같게 일차식을 두 개씩 짝지어 전개하면

$$\begin{aligned} &\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}-24 \\ &= (x^2+2x-3)(x^2+2x-8)-24 \end{aligned}$$

- $x^2+2x=X$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} (X-3)(X-8)-24 &= X^2-11X \\ &= X(X-11) \\ &= (x^2+2x)(x^2+2x-11) \\ &= x(x+2)(x^2+2x-11) \end{aligned}$$

- (2) 마지막 항이 이차식이므로 두 일차식의 상수항의 곱이 같게 일차식을 두 개씩 짝지어 전개하면

$$\begin{aligned} &\{(x-1)(x+2)\}\{(x+1)(x-2)\}+x^2 \\ &= (x^2+x-2)(x^2-x-2)+x^2 \end{aligned}$$

- $x^2-2=X$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} (X+x)(X-x)+x^2 &= X^2-x^2+x^2 \\ &= X^2 \\ &= (x^2-2)^2 \end{aligned}$$

123

- 마지막 항이 상수이므로 두 일차식의 상수항의 합이 같게 일차식을 두 개씩 짝지어 전개하면

$$\begin{aligned} &(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)-27 \\ &= \{(x-1)(x+4)\}\{(x+1)(x+2)\}-27 \\ &= (x^2+3x-4)(x^2+3x+2)-27 \end{aligned}$$

- $x^2+3x=X$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} (X-4)(X+2)-27 &= X^2-2X-35 \\ &= (X-7)(X+5) \\ &= \underbrace{(x^2+3x-7)}_A \underbrace{(x^2+3x+5)}_B \\ \therefore A+B &= x^2+3x-7+x^2+3x+5 \\ &= 2x^2+6x-2 \end{aligned}$$

124

- (1) $x^2=X$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} X^2-5X+4 &= (X-1)(X-4) \\ &= (x^2-1)(x^2-4) \\ &= (x+1)(x-1)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

(2) $x^2 = X$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} X^2 - 2X - 8 &= (X-4)(X+2) \\ &= (x^2-4)(x^2+2) \\ &= (x+2)(x-2)(x^2+2) \end{aligned}$$

(3) $a^2 = A$, $b^2 = B$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} a^4 - a^2b^2 - 12b^4 &= A^2 - AB - 12B^2 \\ &= (A+3B)(A-4B) \\ &= (a^2+3b^2)(a^2-4b^2) \\ &= (a^2+3b^2)(a+2b)(a-2b) \end{aligned}$$

(4) $a^2 = A$, $b^2 = B$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} a^4 - 5a^2b^2 + 4b^4 &= A^2 - 5AB + 4B^2 \\ &= (A-4B)(A-B) \\ &= (a^2-4b^2)(a^2-b^2) \\ &= (a+2b)(a-2b)(a+b)(a-b) \end{aligned}$$

125

(1) 주어진 식에 $-3x^2 = -2x^2 - x^2$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 + 1 &= x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= (x^2-1)^2 - x^2 \\ &= (x^2+x-1)(x^2-x-1) \end{aligned}$$

(2) 주어진 식에 $5x^2 = 6x^2 - x^2$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} x^4 + 5x^2 + 9 &= x^4 + 6x^2 + 9 - x^2 \\ &= (x^2+3)^2 - x^2 \\ &= (x^2+x+3)(x^2-x+3) \end{aligned}$$

(3) 주어진 식에 $3x^2y^2 = 4x^2y^2 - x^2y^2$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} 4x^4 + 3x^2y^2 + y^4 &= 4x^4 + 4x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 \\ &= (2x^2+y^2)^2 - (xy)^2 \\ &= (2x^2+xy+y^2)(2x^2-xy+y^2) \end{aligned}$$

(4) 주어진 식에 $4x^4y^4$ 을 더하고 빼면

$$\begin{aligned} x^8 + 4y^8 &= x^8 + 4x^4y^4 + 4y^8 - 4x^4y^4 \\ &= (x^4+2y^4)^2 - (2x^2y^2)^2 \\ &= (x^4+2x^2y^2+2y^4)(x^4-2x^2y^2+2y^4) \end{aligned}$$

126

$x^2 = X$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^2 - 10 &= X^2 + 3X - 10 = (X+5)(X-2) \\ &= (x^2+5)(x^2-2) \\ &= \{x^2 - (\sqrt{5}i)^2\} \{x^2 - (\sqrt{2})^2\} \\ &= (x+\sqrt{5}i)(x-\sqrt{5}i)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 &= (\sqrt{5}i)^2 + (-\sqrt{5}i)^2 + (\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2 \\ &= -5 - 5 + 2 + 2 \\ &= -6 \end{aligned}$$

127

(1) 여러 문자의 차수가 다르므로 차수가 가장 낮은 문자 y 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} x^3 - x^2y - 2xy + y^2 - 1 &= y^2 - (x^2+2x)y + x^3 - 1 \\ &= y^2 - (x^2+2x)y + (x-1)(x^2+x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} y \quad \quad \quad - (x-1) \quad \quad \quad - (x-1)y \\ y \quad \quad \quad - (x^2+x+1) \quad + \quad - (x^2+x+1)y \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - (x^2+2x)y \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= (y-x+1)(y-x^2-x-1) \\ &= (x-y-1)(x^2+x-y+1) \end{aligned}$$

(2) 여러 문자의 차수가 같으므로 전개한 후 문자 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3 + z^3 \\ &\quad - 3z^2x + 3zx^2 - x^3 \\ &= -3x^2y + 3xy^2 - 3y^2z + 3yz^2 - 3z^2x + 3zx^2 \\ &= -3\{(y-z)x^2 - (y^2-z^2)x + (y-z)yz\} \\ &= -3(y-z)\{x^2 - (y+z)x + yz\} \\ &= -3(y-z)(x-y)(x-z) \\ &= 3(x-y)(y-z)(z-x) \end{aligned}$$

128

(1) 주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} x^2 + 4xy + 3y^2 - 3x - 7y + 2 &= x^2 + (4y-3)x + 3y^2 - 7y + 2 \\ &= x^2 + (4y-3)x + (3y-1)(y-2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad 3y-1 \quad \quad \quad (3y-1)x \\ x \quad \quad \quad y-2 \quad \quad \quad + \quad (y-2)x \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad (4y-3)x \end{array}$$

$$= (x+3y-1)(x+y-2)$$

(2) 주어진 식을 x 에 대하여 정리하면

$$\begin{aligned} 2x^2 + xy - y^2 + x + 4y - 3 &= 2x^2 + (y+1)x - (y^2-4y+3) \\ &= 2x^2 + (y+1)x - (y-3)(y-1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2x \quad \quad \quad - (y-3) \quad \quad \quad - (y-3)x \\ x \quad \quad \quad y-1 \quad \quad \quad + \quad 2(y-1)x \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad (y+1)x \end{array}$$

$$= (2x-y+3)(x+y-1)$$

129

주어진 식을 c 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}
 & a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 - ac^2 + bc^2 \\
 &= (b-a)c^2 + a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 \\
 &= (b-a)c^2 + a^2(a-b) + b^2(a-b) \\
 &= (a-b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0 \\
 &\therefore a=b \text{ 또는 } a^2 + b^2 = c^2
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 삼각형은 이등변삼각형 또는 직각삼각형이다.

TIP 삼각형의 모양의 결정

- △ABC의 세 변의 길이를 a, b, c라 할 때
 (i) $a=b=c \Rightarrow$ 정삼각형
 (ii) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a \Rightarrow$ 이등변삼각형
 (iii) $a^2+b^2=c^2 \Rightarrow$ c가 빗변인 직각삼각형

130

- (1) $f(x)=x^3-x^2+2$ 라 할 때, $f(-1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\
 & & -1 & 2 & -2 \\
 \hline
 & 1 & -2 & 2 & 0
 \end{array}$$

$$\therefore x^3 - x^2 + 2 = (x+1)(x^2 - 2x + 2)$$

- (2) $f(x)=x^3+3x^2-4x-12$ 라 할 때, $f(2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\
 & & 2 & 10 & 12 \\
 \hline
 & 1 & 5 & 6 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore x^3 + 3x^2 - 4x - 12 &= (x-2)(x^2 + 5x + 6) \\
 &= (x-2)(x+2)(x+3)
 \end{aligned}$$

131

- (1) $f(x)=x^4+3x^3-7x^2-27x-18$ 이라 할 때, $f(-1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -1 & 1 & 3 & -7 & -27 & -18 \\
 & & -1 & -2 & 9 & 18 \\
 \hline
 & 1 & 2 & -9 & -18 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18 & \\
 &= (x+1)(x^3 + 2x^2 - 9x - 18)
 \end{aligned}$$

이때 $g(x)=x^3+2x^2-9x-18$ 이라 하면 $g(-2)=0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -2 & 1 & 2 & -9 & -18 \\
 & & -2 & 0 & 18 \\
 \hline
 & 1 & 0 & -9 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore x^3 + 2x^2 - 9x - 18 &= (x+2)(x^2 - 9) \\
 &= (x+2)(x+3)(x-3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18 & \\
 &= (x+1)(x+2)(x+3)(x-3)
 \end{aligned}$$

- (2) $f(x)=2x^4+3x^3-7x^2-12x-4$ 라 할 때, $f(-1)=0$ 이

므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -1 & 2 & 3 & -7 & -12 & -4 \\
 & & -2 & -1 & 8 & 4 \\
 \hline
 & 2 & 1 & -8 & -4 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 12x - 4 & \\
 &= (x+1)(2x^3 + x^2 - 8x - 4)
 \end{aligned}$$

이때 $g(x)=2x^3+x^2-8x-4$ 라 하면 $g(2)=0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2 & 2 & 1 & -8 & -4 \\
 & & 4 & 10 & 4 \\
 \hline
 & 2 & 5 & 2 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore 2x^3 + x^2 - 8x - 4 &= (x-2)(2x^2 + 5x + 2) \\
 &= (x-2)(x+2)(2x+1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 12x - 4 & \\
 &= (x+1)(x-2)(x+2)(2x+1)
 \end{aligned}$$

132

일차식 $2x-1$ 이 다항식 $12x^3+4x^2-17x+k$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
 \frac{1}{2} & 12 & 4 & -17 & k \\
 & & 6 & 5 & -6 \\
 \hline
 & 12 & 10 & -12 & k-6
 \end{array}$$

나누어 떨어져야 하므로 $k-6=0 \therefore k=6$

$$\begin{aligned}
 \therefore 12x^3 + 4x^2 - 17x + 6 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(12x^2 + 10x - 12) \\
 &= (2x-1)(6x^2 + 5x - 6) \\
 &= (2x-1)(3x-2)(2x+3)
 \end{aligned}$$

04 약수와 배수

개념 확인 문제

p. 97

- 1 (1) 최대공약수 : $2xyz^2$, 최소공배수 : $4x^2y^2z^3$
 (2) 최대공약수 : abc , 최소공배수 : $a^3b^2c^2$
 (3) 최대공약수 : $x-3$
 최소공배수 : $(x-1)(2x+1)(x-3)$
 (4) 최대공약수 : $x+2$
 최소공배수 : $(x+2)(x-1)(x-2)(x^2-2x+4)$

1

- (1) $2x^2yz^2, 4xy^2z^3$ 에서
 최대공약수 : $2xyz^2$, 최소공배수 : $4x^2y^2z^3$
 (2) a^3b^2c, abc^2, a^2bc^2 에서
 최대공약수 : abc , 최소공배수 : $a^2b^2c^2$
 (3) 주어진 두 식을 인수분해하면
 $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$
 $2x^2-5x-3=(2x+1)(x-3)$
 $\therefore \begin{cases} \text{최대공약수 : } x-3 \\ \text{최소공배수 : } (x-1)(2x+1)(x-3) \end{cases}$
 (4) 주어진 세 식을 인수분해하면
 $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$
 $x^2-4=(x+2)(x-2)$
 $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$
 $\therefore \begin{cases} \text{최대공약수 : } x+2 \\ \text{최소공배수 : } (x+2)(x-1)(x-2)(x^2-2x+4) \end{cases}$

유 제

pp. 98~100

133 2	134 $a=-1, b=6$	135 0
136 $(x+1)(x-1)(x-2)$	137 $x+2, 6$	
138 $x-1$	139 $2x^2+5x+3$	140 1 141 $x+2$

133

$f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ 라 할 때, 다항식 $x-1, x-2$ 가 다항식 $f(x)$ 의 약수이므로 인수정리에 의해

$$f(1)=0, f(2)=0$$

$$f(1)=0 \text{에서 } f(1)=1+a+b+2=0$$

$$\therefore a+b=-3$$

$$f(2)=0 \text{에서 } f(2)=8+4a+2b+2=0$$

$$\therefore 2a+b=-5$$

$$\text{두 식을 연립하면 } a=-2, b=-1$$

$$\therefore ab=(-2) \cdot (-1)=2$$

134

다항식 A 가 다항식 B 의 배수이므로 B 는 A 의 약수이다.

$$f(x)=x^3+4x^2-ax-b \text{라 할 때,}$$

다항식 $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ 가 다항식 $f(x)$ 의 약수이므로 인수정리에 의해

$$f(-2)=0, f(-3)=0$$

$$f(-2)=0 \text{에서 } f(-2)=-8+16+2a-b=0$$

$$\therefore 2a-b=-8$$

$$f(-3)=0 \text{에서 } f(-3)=-27+36+3a-b=0$$

$$\therefore 3a-b=-9$$

$$\text{두 식을 연립하면 } a=-1, b=6$$

135

$g(x)=x^3-x^2+x+a$ 라 할 때, 다항식 $x-1$ 이 다항식 $g(x)$ 의 약수이므로 인수정리에 의해

$$g(1)=0$$

$$g(1)=0 \text{에서 } g(1)=1-1+1+a=0$$

$$\therefore a=-1$$

$$\therefore g(x)=x^3-x^2+x-1$$

$g(1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\therefore g(x)=(x-1)(x^2+1)$$

$f(x)$ 가 $g(x)$ 의 모든 인수의 합이므로

$$f(x)=(x-1)+(x^2+1)=x^2+x$$

$$\therefore f(-1)=1-1=0$$

136

두 다항식을 $f(x)=x^2+ax-2, g(x)=x^2+bx+2$ 라 하면 최대공약수 $x-2$ 가 두 다항식 $f(x), g(x)$ 의 인수이므로 인수정리에 의해

$$f(2)=0, g(2)=0$$

$$f(2)=0 \text{에서 } f(2)=4+2a-2=0 \quad \therefore a=-1$$

$$g(2)=0 \text{에서 } g(2)=4+2b+2=0 \quad \therefore b=-3$$

따라서 두 다항식 $f(x), g(x)$ 는

$$f(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$$

$$g(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

이므로 최소공배수는 $(x+1)(x-1)(x-2)$

137

$f(x), g(x)$ 를 각각 인수분해하면

$$f(x)=(x+2)(x-1), g(x)=(x+2)(2x-1)$$

이므로 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수는 $x+2$ 이다.
 따라서 세 다항식의 최대공약수는 $x+2$ 이다.
 최대공약수 $x+2$ 는 $h(x)$ 의 인수이므로 인수정리에 의해
 $h(-2)=0$
 $h(-2)=0$ 에서
 $h(-2)=4-2m+8=0 \quad \therefore m=6$

138

다항식 x^2+3x-4 를 인수분해하면

$$x^2+3x-4=(x+4)(x-1) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이므로 최소공배수 $2x^3+5x^2-11x+4$ 는 $x+4$, $x-1$ 을 인수로 가진다.

따라서 최소공배수 $2x^3+5x^2-11x+4$ 를 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 5 & -11 & 4 \\ & & 2 & 7 & -4 \\ \hline -4 & 2 & 7 & -4 & 0 \\ & & -8 & 4 & \\ \hline & 2 & -1 & & 0 \end{array}$$

$$\therefore 2x^3+5x^2-11x+4=(x-1)(x+4)(2x-1)$$

따라서 다항식 $2x^2-3x+a$ 는

$$(2x-1)(x+4)=2x^2+7x-4$$

$$(2x-1)(x-1)=2x^2-3x+1$$

중 하나이다. 그런데 다항식 $2x^2-3x+a$ 의 일차항의 계수가 -3 이므로

$$\begin{aligned} 2x^2-3x+a &= 2x^2-3x+1 \\ &= (2x-1)(x-1) \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

따라서 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 에서 두 다항식의 최대공약수는 $x-1$

139

두 이차다항식을 $f(x)$, $g(x)$ 라 하면 두 이차다항식의 최대공약수가 $x+1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x+1), g(x) = b(x+1) \\ &\quad (a, b \text{는 서로소인 일차다항식}) \end{aligned}$$

이때 두 이차다항식 $f(x)$, $g(x)$ 의 최소공배수는

$$ab(x+1) \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

주어진 최소공배수는

$$\begin{aligned} x^3+4x^2+3x &= x(x^2+4x+3) = x(x+3)(x+1) \\ &\quad \dots\dots \textcircled{10} \end{aligned}$$

$$\textcircled{9} = \textcircled{10} \text{이므로} \quad ab = x(x+3)$$

a , b 는 서로소인 일차다항식이므로

$$a=x, b=x+3 \text{ 또는 } a=x+3, b=x$$

따라서 두 이차다항식 $f(x)$, $g(x)$ 는

$$f(x)=x(x+1), g(x)=(x+3)(x+1) \text{ 또는}$$

$$f(x)=(x+3)(x+1), g(x)=x(x+1)$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x)+g(x) &= x^2+x+x^2+4x+3 \\ &= 2x^2+5x+3 \end{aligned}$$

140

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 의 최대공약수가 $x-1$ 이므로

$$f(x)=a(x-1), g(x)=b(x-1) (a, b \text{는 서로소})$$

$$f(x)g(x)=ab(x-1)^2 \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

주어진 $f(x)g(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)g(x)=x^3-3x+2=(x+2)(x-1)^2 \quad \dots\dots \textcircled{12}$$

$\textcircled{11} = \textcircled{12}$ 이므로

$$a=1, b=x+2 \text{ 또는 } a=x+2, b=1$$

$$\therefore f(x)=x-1, g(x)=(x+2)(x-1) \text{ 또는}$$

$$f(x)=(x+2)(x-1), g(x)=x-1$$

이때 $f(2)=4$ 이므로

$$f(x)=(x+2)(x-1), g(x)=x-1$$

$$\therefore g(2)=2-1=1$$

141

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 의 최대공약수를 G , 최소공배수를 L 이라 하면

$$f(x)=aG, g(x)=bG (a, b \text{는 서로소})$$

$$A-B=(a-b)G, L=abG$$

이때 ab , $a-b$ 는 서로소이므로 G 는 L 과 $A-B$ 의 최대공약수이다.

$A-B$ 와 L 을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$A-B=x^3+5x^2+7x+2 \text{에서}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 5 & 7 & 2 \\ & & -2 & -6 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\therefore A-B=(x+2)(x^2+3x+1) \quad \dots\dots \textcircled{13}$$

$$L=x^4+2x^3-2x^2-3x+2 \text{에서}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & -2 & -3 & 2 \\ & & 1 & 3 & 1 & -2 \\ \hline -2 & 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ & & -2 & -2 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & -1 & & 0 \end{array}$$

$$\therefore L=(x-1)(x+2)(x^2+x-1) \quad \dots\dots \textcircled{14}$$

따라서 $\textcircled{13}$, $\textcircled{14}$ 에서 두 다항식의 최대공약수는 $x+2$

001 ③	002 ⑤	003 ⑤	004 ①	005 ④
006 ②	007 ①	008 ⑤	009 $x(x+1)(x-1)^2$	
010 2	011 ②	012 ③		

001

공통인수 $\frac{1}{3}(k+1)$ 로 묶으면

$$\begin{aligned} & \frac{k}{3}(k+1)(k+2) + (k+1)(k-2) \\ &= \frac{1}{3}(k+1)\{k(k+2)+3(k-2)\} \\ &= \frac{1}{3}(k+1)(k^2+5k-6) \\ &= \frac{1}{3}(k+1)(k-1)(k+6) \end{aligned}$$

002

- ① $(x+1)^2 - (y+1)^2 = (x+1+y+1)\{x+1-(y+1)\}$
 $= (x+y+2)(x-y) \quad (\therefore \text{참})$
- ② $x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2y + 2x$
 $= x^2 + y^2 + 1^2 + 2xy + 2x \cdot 1 + 2y \cdot 1$
 $= (x+y+1)^2 \quad (\therefore \text{참})$
- ③ $1 - 3a + 3a^2 - a^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot a + 3 \cdot 1 \cdot a^2 - a^3$
 $= (1-a)^3 = -(a-1)^3 \quad (\therefore \text{참})$
- ④ $x^6 + 1 = (x^2)^3 + 1^3 = (x^2+1)(x^4-x^2+1) \quad (\therefore \text{참})$
- ⑤ $(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4+x^2+1 \neq x^4-x^2+1$
 $(\therefore \text{거짓})$

003

$$\begin{aligned} & (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \\ &= a^2b + a^2c + ab^2 + 2abc + c^2a + b^2c + bc^2 \\ &= a^2(b+c) + a(b^2+2bc+c^2) + bc(b+c) \\ &= (b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\} \\ &= (a+b)(b+c)(c+a) \end{aligned}$$

따라서 $a+b$, $b+c$, $c+a$ 모두 주어진 다항식의 인수이다.

004

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면

$$\begin{aligned} & x^2 + xy - 2y^2 - x + 7y - 6 \\ &= x^2 + (y-1)x - (2y^2 - 7y + 6) \\ &= x^2 + (y-1)x - (2y-3)(y-2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad - (y-2) \\ x \quad \quad \quad - (y-2)x \\ \quad \quad \quad + (2y-3)x \\ \quad \quad \quad (y-1)x \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= (x-y+2)(x+2y-3) \\ \therefore x-y+2+x+2y-3 &= 2x+y-1 \end{aligned}$$

005

두 다항식을 각각 인수분해하면

$$\begin{aligned} & x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2) \\ & x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2(x-2)^2 \\ \therefore & \begin{cases} \text{최대공약수} : x(x-2) \\ \text{최소공배수} : x^2(x-1)(x-2)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

006

$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 6$ 이라 할 때, 다항식 $f(x)$ 가 $x-2$ 와 $2x-1$ 의 공배수이므로 $x-2$ 와 $2x-1$ 은 다항식 $f(x)$ 의 약수이다. 따라서 인수정리에 의해

$$f(2) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} f(2) = 0 \text{에서} \quad & f(2) = 16 + 4a + 2b + 6 = 0 \\ \therefore & 2a + b = -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{에서} \quad & f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + 6 = 0 \\ \therefore & a + 2b = -25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{두 식을 연립하면} \quad & a = 1, \quad b = -13 \\ \therefore & a + b = 1 + (-13) = -12 \end{aligned}$$

007

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab \\ &\quad -2bc-2ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 \\ &\quad + (c-a)^2\} \end{aligned}$$

$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 이므로

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \\ \therefore & \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0 \end{aligned}$$

이때 a , b , c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$\begin{aligned} & a+b+c > 0 \\ \therefore & (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \\ \therefore & a-b=0, \quad b-c=0, \quad c-a=0 \quad \therefore a=b=c \end{aligned}$$

따라서 $a=b=c$ 를 만족하는 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.

008

$n=100$ 이라 하면

$$\begin{aligned} \sqrt{99 \cdot 100 \cdot 101 \cdot 102 + 1} &= \sqrt{(n-1)n(n+1)(n+2) + 1} \\ \text{이때 } (n-1)n(n+1)(n+2) + 1 &\text{을 인수분해하면} \\ (n-1)n(n+1)(n+2) + 1 &= \{(n-1)(n+2)\}[n(n+1)] + 1 \\ &= (n^2+n-2)(n^2+n) + 1 \\ n^2+n &= N \text{으로 치환하면} \\ (N-2)N + 1 &= N^2 - 2N + 1 \\ &= (N-1)^2 \\ &= (n^2+n-1)^2 \quad \dots\dots \textcircled{7} \\ \therefore \sqrt{99 \cdot 100 \cdot 101 \cdot 102 + 1} &= \sqrt{(n-1)n(n+1)(n+2) + 1} \\ &= \sqrt{(n^2+n-1)^2} \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= n^2+n-1 \\ &= 100^2+100-1 \quad (\because n=100) \\ &= 10099 \end{aligned}$$

009

두 다항식 A, B의 최대공약수를 G, 최소공배수를 L이라 하면

$$\begin{aligned} A &= aG, B = bG, L = abG \quad (a, b \text{는 서로소인 다항식}) \\ A+B &= (a+b)G = 2x^2-x-1 = (2x+1)(x-1) \\ L &= abG = x^3-x = x(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

이때 a+b, ab는 서로소이므로 G는 A+B와 L의 최대공약수이다.

$$\therefore G = x-1$$

$$a = x, b = x+1 \text{ 또는 } a = x+1, b = x$$

$$\therefore AB = abG^2 = x(x+1)(x-1)^2$$

010

$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ 이라 할 때, $f(1) = 0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 + 4x^2 + x - 6 &= (x-1)(x^2 + 5x + 6) \\ &= (x-1)(x+2)(x+3) \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$g(x) = 2x^3 + (a-2)x^2 - 3ax + 2a$ 라 할 때, $g(1) = 0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & a-2 & -3a & 2a \\ & & 2 & a & -2a \\ \hline & 2 & a & -2a & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2x^3 + (a-2)x^2 - 3ax + 2a &= (x-1)(2x^2 + ax - 2a) \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 의 최대공약수를 AB(A, B는 서로소인 일차식)라 할

때, AB는 일차식이고, 두 식 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 의 공약수는 $x-1$ 이므로

$$A = x-1 \text{일 때, } B = x+2 \text{ 또는 } B = x+3$$

$B = x+2, B = x+3$ 은 $\textcircled{7}$ 에서 $2x^2 + ax - 2a$ 의 인수이므로

$$B = x+2 \text{일 때, } 2 \cdot (-2)^2 + a(-2) - 2a = 0$$

$$\therefore a = 2$$

$$B = x+3 \text{일 때, } 2 \cdot (-3)^2 + a(-3) - 2a = 0$$

$$\therefore a = \frac{18}{5}$$

그런데 a는 정수이므로 $a = 2$

011

두 다항식 A, B의 최대공약수를 G라 하면

$$A = aG, B = bG \quad (a, b \text{는 서로소인 다항식})$$

$$\begin{aligned} \neg. (A+B, AB) &= ((a+b)G, abG^2) = G \\ &= (A, B) \quad (\because \text{참}) \end{aligned}$$

$$\neg. (A^2, B^2) = (a^2G^2, b^2G^2) = G^2 = \{(A, B)\}^2 \quad (\because \text{참})$$

$$\neg. (\text{반례}) A = x^2, B = x^2 \text{이면 } (A, B) = (x^2, x^2) = x^2$$

$$(A+x, B+x) = (x^2+x, x^2+x) = x^2+x \quad (\because \text{거짓})$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

012

민회는 4일 기준으로 3일을 일하고 마지막 4일째 쉬므로 일하는 날을 ○, 쉬는 날을 ×로 표시하여 나열하면 다음과 같다.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
○	○	○	×	○	○	○	×	○	○	○	×	...

또, 철수는 10일을 기준으로 7일을 일하고 8일째, 9일째, 10일째 되는 날 쉬므로

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	○	○	...

이것을 하나의 표에 나타내어 보면

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...
○	○	○	×	○	○	○	×	○	○	○	×	○	○	○	×	○	○	○	×	...
○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	...

위 표에서와 같이 처음 20일 동안 8일째와 20일째, 즉 2일간 같이 쉬게 된다. 이때 4와 10의 최소공배수가 20이므로 두 사람은 20일을 주기로 2일씩 함께 쉬게 되므로 360일 동안

$$(360 \div 20) \times 2 = 18 \times 2 = 36(\text{일})$$

을 함께 쉬게 된다. 마지막 남은 5일은 8일째가 되기 전이므로 함께 쉬는 날이 없다.

001 ⑤	002 117	003 ⑤	004 2	005 ④
006 10	007 20	008 6	009 ㄱ, ㄴ, ㄷ	
010 4	011 16	012 ⑤	013 ①	014 x+1
015 10				

001

- ① $(x+2)(x-4)(x+5)$
 $=x^3+(2-4+5)x^2+(-8-20+10)x+2\cdot(-4)\cdot5$
 $=x^3+3x^2-18x-40$ ($\therefore$ 참)
- ② $(3a-1)(9a^2+3a+1)=(3a)^3-1$
 $=27a^3-1$ ($\therefore$ 참)
- ③ $(2x^2+3x+2)(3x-4)+2x+5$
 $=3x(2x^2+3x+2)-4(2x^2+3x+2)+2x+5$
 $=6x^3+9x^2+6x-8x^2-12x-8+2x+5$
 $=6x^3+x^2-4x-3$ ($\therefore$ 참)
- ④ $(x+y-1)(2x-y+3)$
 $=x(2x-y+3)+y(2x-y+3)-(2x-y+3)$
 $=2x^2-xy+3x+2xy-y^2+3y-2x+y-3$
 $=2x^2+xy-y^2+x+4y-3$ ($\therefore$ 참)
- ⑤ $(x^2+2x-3)(x^2+2x+3)=(x^2+2x)^2-3^2$
 $=x^4+4x^3+4x^2-9$ ($\therefore$ 거짓)

002

m+n, mn을 구하면

$$\begin{aligned} m+n &= ax+by+ay+bx \\ &= a(x+y)+b(x+y) \\ &= (a+b)(x+y) \\ &= 1 \times 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mn &= (ax+by)(ay+bx) \\ &= a^2xy+abx^2+aby^2+b^2xy \\ &= xy(a^2+b^2)+ab(x^2+y^2) \\ &= xy\{(a+b)^2-2ab\}+ab\{(x+y)^2-2xy\} \\ &= 4 \times (1-4) + 2 \times (9-8) = -10 \\ \therefore m^3+n^3 &= (m+n)^3-3mn(m+n) \\ &= 3^3-3 \cdot (-10) \cdot 3 = 117 \end{aligned}$$

003

- ① $3x^2+(3a-2)x-5a-5=3x^2+3ax-2x-5a-5$
 $= (3x-5)a + (3x^2-2x-5)$
 $= (3x-5)a + (3x-5)(x+1)$
 $= (3x-5)(a+x+1)$ ($\therefore$ 참)
- ② $x^4-8xy^3=x(x^3-8y^3)$
 $=x(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$ ($\therefore$ 참)

- ③ $x+y=A$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} (x+y)^2-3(x+y)-4 &= A^2-3A-4 \\ &= (A-4)(A+1) \\ &= (x+y-4)(x+y+1) \quad (\therefore \text{참}) \end{aligned}$$

- ④ $x^4-13x^2+36=(x^2-4)(x^2-9)$
 $= (x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$ ($\therefore$ 참)

- ⑤ 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3+2x^2-5x-6 &= (x+1)(x^2+x-6) \\ &= (x+1)(x-2)(x+3) \quad (\therefore \text{거짓}) \end{aligned}$$

004

주어진 식이 x에 대한 항등식이므로

$$x=0\text{을 대입하면} \quad b=4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$x=1\text{을 대입하면} \quad 3+a+b=1 \quad \therefore a=-6 \quad (\because \textcircled{㉠}) \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\begin{aligned} x=2\text{를 대입하면} \quad 24+2a+b &= 4c \quad \therefore c=4 \quad (\because \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}) \\ \therefore a+b+c &= (-6)+4+4=2 \end{aligned}$$

005

주어진 조건에 의해

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + R \\ &= \frac{1}{a}(ax+b)Q(x) + R \\ &= (ax+b) \cdot \frac{1}{a}Q(x) + R \\ \therefore \text{몫} : \frac{1}{a}Q(x), \text{나머지} : R \end{aligned}$$

006

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} 2x^2-5xy+2y^2-x-7y-15 \\ &= 2x^2-(5y+1)x+2y^2-7y-15 \\ &= 2x^2-(5y+1)x+(2y+3)(y-5) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x & \xrightarrow{\quad} & -(y-5) \\ x & \xrightarrow{\quad} & -(2y+3) \end{array} \quad \begin{array}{r} -(y-5)x \\ +) -2(2y+3)x \\ \hline -(5y+1)x \end{array}$$

$$= (2x-y+5)(x-2y-3)$$

위 식을 $(2x-y+a)(x-by-c)$ 와 비교하면

$$\therefore a=5, b=2, c=3$$

따라서 집합 $\{a, b, c\} = \{5, 2, 3\}$ 이므로 모든 원소의 합은 10이다.

007

두 다항식 $A=aG, B=bG$ (a, b 는 서로소)라 하면

$$L=abG, AB=abG^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

최대공약수가 $x+2$ 이므로 두 다항식의 곱은 $(x+2)^2$ 을 인수로 갖는다.

조립제법을 이용하여 $x^4+6x^3+9x^2-4x-12$ 를 인수분해해보면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 6 & 9 & -4 & -12 \\ & & -2 & -8 & -2 & 12 \\ \hline -2 & 1 & 4 & 1 & -6 & 0 \\ & & -2 & -4 & 6 & \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^4+6x^3+9x^2-4x-12 &= (x+2)^2(x^2+2x-3) \\ &= (x-1)(x+3)(x+2)^2 \end{aligned}$$

위 식을 ①과 비교해 보면

$$a=x-1, b=x+3 \text{ 또는 } a=x+3, b=x-1$$

$$\therefore L(x)=abG=(x-1)(x+3)(x+2)$$

$$\therefore L(2)=(2-1)(2+3)(2+2)=20$$

008

다항식 x^3+ax^2+bx+1 이 $(x+1)^2$ 으로 나누어 떨어지므로 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^3+ax^2+bx+1=(x+1)^2Q(x)$$

$$x=-1 \text{을 대입하면 } -1+a-b+1=0$$

$$\therefore a=b$$

$$\therefore x^3+ax^2+ax+1=(x+1)^2Q(x)$$

좌변을 인수분해하면

$$(x+1)\{x^2+(a-1)x+1\}=(x+1)^2Q(x)$$

양변을 $x+1$ 로 나누면

$$x^2+(a-1)x+1=(x+1)Q(x)$$

다시 $x=-1$ 을 대입하면

$$1-a+1+1=0 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore a+b=3+3=6$$

009

$A=aG, B=bG$ (a, b 는 서로소인 다항식)라 하면

$$G(A, B)=G, L(A, B)=abG$$

$\neg. A+B=(a+b)G, A-B=(a-b)G$ 에서

$a+b, a-b$ 는 서로소이므로

$$G(A+B, A-B)=G=G(A, B) (\because \text{참})$$

$\neg. A^2=a^2G^2, B^2=b^2G^2$ 에서 a^2, b^2 은 서로소이므로

$$L(A^2, B^2)=a^2b^2G^2=[L(A, B)]^2 (\because \text{참})$$

$$\neg. \frac{L(A, B)}{A} = \frac{abG}{aG} = b, \frac{L(A, B)}{B} = \frac{abG}{bG} = a \text{이므로}$$

$$G\left(\frac{L(A, B)}{A}, \frac{L(A, B)}{B}\right)=G(b, a)=1 (\because \text{참})$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

010

주어진 식을 전개하면

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=22$$

$$2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)=22$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=11 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2$$

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=2$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①+②에서

$$2(a^2+b^2+c^2)=12 \quad \therefore a^2+b^2+c^2=6$$

①-②에서

$$2(ab+bc+ca)=10 \quad \therefore ab+bc+ca=5$$

$$\therefore (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

$$=6+2 \cdot 5$$

$$=16$$

$$\therefore a+b+c=4 (\because a>0, b>0, c>0)$$

011

$$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$$

$$=[(x-1)(x-7)][(x-3)(x-5)]+a$$

$$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+a$$

$x^2-8x=A$ 로 치환하면

$$(A+7)(A+15)+a=A^2+22A+105+a$$

$$=(A+11)^2-16+a$$

위의 식이 완전제곱꼴이려면

$$-16+a=0 \quad \therefore a=16$$

012

두 다항식 $f(x), g(x)$ 의 최대공약수를 G 라 하면

$$f(x)=aG, g(x)=bG \text{ (a, b 는 서로소인 다항식)}$$

$$f(x)+g(x)=(a+b)G=2(x+2)(x-2)$$

$$f(x)g(x)=abG^2=x^4-9x^2+4x+12$$

$$=(x+1)(x+3)(x-2)^2$$

$$\therefore G=x-2 \text{이고 } a=x+1, b=x+3 \text{ 또는}$$

$$a=x+3, b=x+1$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-2), g(x)=(x+3)(x-2)$ 또는
 $f(x)=(x+3)(x-2), g(x)=(x+1)(x-2)$
 이때 $f(1)=-2$ 이므로
 $f(x)=(x+1)(x-2), g(x)=(x+3)(x-2)$
 $\therefore g(3)=6$

013

1200을 소인수분해해 보면 $1200=2^4 \times 3 \times 5^2$

$1200=ab$ (a, b 는 서로소)라 하면

$$a=2^p \cdot 3^q \cdot 5^r, b=2^{4-p} \cdot 3^{1-q} \cdot 5^{2-r}$$

이때 a 와 b 가 서로소일 조건은

$$p=0 \text{ 또는 } 4-p=0$$

$$q=0 \text{ 또는 } 1-q=0$$

$$r=0 \text{ 또는 } 2-r=0$$

따라서 순서쌍 (p, q, r)가 취할 수 있는 경우는

$$(0, 0, 0), (0, 0, 2), (0, 1, 0), (0, 1, 2),$$

$$(4, 0, 0), (4, 0, 2), (4, 1, 0), (4, 1, 2)$$

그런데, $(0, 0, 0)$ 과 $(4, 1, 2)$, $(0, 0, 2)$ 과 $(4, 1, 0)$,
 $(0, 1, 0)$ 과 $(4, 0, 2)$, $(0, 1, 2)$ 와 $(4, 0, 0)$ 은 서로 같
 은 경우이므로 구하는 모든 경우의 수는 4가지이다.

014

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누면 나머지가 3, $x+3$ 으로 나누면 나머
 지가 -2 이므로 나머지정리에 의해

$$f(2)=3, f(-3)=-2$$

$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ 이므로 다항식 $f(x)$ 를
 $(x-2)(x+3)$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 이차식으로 나누었으
 므로 나머지를 $ax+b$ 라 하면

$$f(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$$

$$f(2)=3 \text{에서 } f(2)=2a+b=3$$

$$f(-3)=-2 \text{에서 } f(-3)=-3a+b=-2$$

$$\text{두 식을 연립하면 } a=1, b=1$$

따라서 구하는 나머지는 $x+1$ 이다.

채점 영역	단계	채점 요소	배점 비율
문제 이해 & 해결 과정	가	나머지정리를 이용하여 $f(2), f(-3)$ 의 값 구하기	20%
	나	나머지를 $ax+b$ 로 놓고 식 세우기	30%
	다	a, b 에 관한 식 세우기	30%
답 구하기	라	a, b 의 값을 구하고 나머지 나타내기	20%

015

$$x-y-z=1 \cdots \textcircled{1}, x-2y-3z=0 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$x=2-z, y=1-2z$$

이것을 $axy+byz+czx=6$ 에 대입하면

$$a(2-z)(1-2z)+b(1-2z)z+cz(2-z)=6$$

$$a(2-5z+2z^2)+bz-2bz^2+2cz-cz^2=6$$

$$2a-5az+2az^2+bz-2bz^2+2cz-cz^2=6$$

$$z^2(2a-2b-c)+z(b-5a+2c)+2a-6=0$$

이 식은 모든 실수 z 에 대하여 성립하므로

$$2a-2b-c=0, b-5a+2c=0, 2a-6=0$$

세 식을 연립하면

$$a=3, b=-1, c=8$$

$$\therefore a+b+c=3+(-1)+8=10$$

채점 영역	단계	채점 요소	배점 비율
문제 이해 & 해결 과정	가	x, y 를 z 로 나타내기	20%
	나	z 에 관한 내림차순으로 식을 정리하기	30%
	다	항등식임을 이용하여 a, b, c 의 관계식 세우기	30%
답 구하기	라	$a+b+c$ 의 값 구하기	20%

사고력 기르기

p. 107

001 ③

002 16

003 ④

004 ②

001

$f(n)$ 은 3^n+5^n 을 10으로 나눈 나머지가므로 3^n+5^n 의 일의
 자리 수이다. 3^n 과 5^n 의 일의 자리 수를 구해 보면

$$3^n \Rightarrow 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, \dots$$

$$5^n \Rightarrow 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, \dots$$

이므로 3^n+5^n 의 일의 자리 수는

$$3^n+5^n \Rightarrow 8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, \dots$$

따라서 $f(n)$ 은 8, 4, 2, 6 네 개의 수의 반복이다.

$$\neg. f(4)=6 (\because \text{참})$$

$$\neg. n=1 \text{이면 } f(1)=8, f(3)=2 (\because \text{거짓})$$

$$\begin{aligned}
 \text{ㄷ. } & f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100) \\
 & =8+4+2+6+8+4+2+6+\cdots \\
 & =25 \times (8+4+2+6) \\
 & =25 \times 20=500 (\because \text{참})
 \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

002

$f(x)$ 가 이차다항식이므로 $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 로 놓으면 $f(0)=1$ 이므로

$$c=1 \quad \therefore f(x)=ax^2+bx+1$$

또, $f(g(x))=a(x+k)^2+b(x+k)+1$,

$$g(f(x))=ax^2+bx+1+k$$

이므로 $f(g(x))+g(f(x))=2x^2$ 에서

$$a(x+k)^2+b(x+k)+1+ax^2+bx+1+k=2x^2$$

$$2ax^2+(2ak+2b)x+(ak^2+bk+k+2)=2x^2$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$2a=2, 2ak+2b=0, ak^2+bk+k+2=0$$

세 식을 연립하면

$$a=1, b=2, k=-2$$

$$\therefore f(x)=x^2+2x+1$$

$$\therefore f(3)=16$$

003

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= (x-1)f_2(x)+r_1 \\
 &= (x-1)\{(x-1)f_3(x)+r_2\}+r_1 \\
 &= (x-1)^2f_3(x)+r_2(x-1)+r_1 \\
 &= (x-1)^2\{(x-1)f_4(x)+r_3\}+r_2(x-1)+r_1 \\
 &= (x-1)^3f_4(x)+r_3(x-1)^2+r_2(x-1)+r_1 \\
 &\quad \dots \\
 &= (x-1)^nf_{n+1}(x)+r_n(x-1)^{n-1}+r_{n-1}(x-1)^{n-2}+ \\
 &\quad \quad \quad \dots+r_2(x-1)+r_1 \\
 \therefore R(x) &= r_n(x-1)^{n-1}+\dots+r_2(x-1)+r_1 \\
 \therefore R(2) &= r_n+r_{n-1}+\dots+r_2+r_1
 \end{aligned}$$

004

도서관에 3분마다 2명의 학생이 들어오고 5분마다 1명의 학생이 나가므로 3과 5의 공배수인 15분마다 $2 \times 5=10$ (명)의 학생이 들어오고 $1 \times 3=3$ (명)의 학생이 나간다.

따라서 15분마다 7명의 학생이 늘어난다. 오전 9시 정각에 35개의 좌석이 남아 있으므로 35명의 학생이 늘어나는 데 걸

리는 시간은 $\frac{15}{7} \times 35=75$ (분)이므로 도서관의 자리가 꽉 차게 되는 시각은 10시 15분이다.

01 유리식

개념 확인 문제

p. 109

$$1 (1) \frac{2bxy}{3a} \quad (2) \frac{x-2}{x}$$

$$2 (1) \frac{b^2}{abx^2}, \frac{a^2x}{abx^2}$$

$$(2) \frac{(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)}, \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}$$

$$3 (1) \frac{x+4}{x+1} \quad (2) \frac{1}{1+x^3} \quad (3) \frac{x}{x-2} \quad (4) \frac{3x}{x^2+x+1}$$

1

(1) 주어진 식의 분모, 분자를 최대공약수 $2a^2x^2y$ 로 나누면

$$\frac{4a^3bx^3y^2}{6a^3x^2y} = \frac{(4a^3bx^3y^2) \div (2a^2x^2y)}{(6a^3x^2y) \div (2a^2x^2y)} = \frac{2bxy}{3a}$$

(2) 주어진 식의 분모, 분자를 인수분해한 후 최대공약수로 나누면

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-x} = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)} = \frac{x-2}{x}$$

2

(1) 두 분수식의 분모의 최소공배수는 abx^2 이므로

$$\frac{b}{ax^2} = \frac{b^2}{abx^2}, \quad \frac{a}{bx} = \frac{a^2x}{abx^2}$$

(2) 두 분수식의 분모의 최소공배수가 $x(x-1)(x+1)$ 이므로

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)},$$

$$\frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}$$

3

$$(1) \frac{x}{x-2} + \frac{x-8}{x^2-x-2} = \frac{x}{x-2} + \frac{x-8}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{x(x+1)+x-8}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+4}{x+1}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x+x^2} - \frac{1+x^2}{1+x^3} \\
 &= \frac{(1-x+x^2)+(x+1)-(1+x^2)}{(x+1)(1-x+x^2)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1+x^3}$$

$$(3) \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x-3} \times \frac{x^2-3x}{x^2-x-2}$$

$$= \frac{(x+1)^2}{(x-3)(x+1)} \times \frac{x(x-3)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{x}{x-2}$$

$$(4) \frac{x^3+x^2}{x^3-1} \div \frac{2x^2+x}{x^2-1} \times \frac{6x+3}{x^2+2x+1}$$

$$= \frac{x^2(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \times \frac{(x+1)(x-1)}{x(2x+1)} \times \frac{3(2x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3x}{x^2+x+1}$$

유 제

pp. 110~115

$$142 \ 10 \quad 143 \ 6 \quad 144 \ 1$$

$$145 \ (1) \ \frac{2x-1}{x} \quad (2) \ \frac{4}{5}$$

$$146 \ (1) \ \frac{3}{x(x+3)} \quad (2) \ \frac{49}{50} \quad 147 \ 13$$

$$148 \ (1) \ 11 \quad (2) \ 36 \quad (3) \ 119 \quad 149 \ (1) \ 2 \quad (2) \ 2$$

$$150 \ -7 \quad 151 \ (1) \ \frac{19}{5} \quad (2) \ -2 \quad 152 \ \frac{7}{13} \quad 153 \ \frac{3}{7}$$

$$154 \ 1 \quad 155 \ \frac{5}{9} \quad 156 \ 6 \quad 157 \ ③ \quad 158 \ 90$$

142

주어진 식의 좌변을 통분하여 정리하면

$$\frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$$

$$\frac{(a+b)x+2a+b}{x^2+3x+2} = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$$a+b=2, \ 2a+b=1$$

두 식을 연립하면 $a=-1, \ b=3$

$$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+3^2=10$$

143

주어진 식의 우변을 통분하여 정리하면

$$\frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{a(1-x)^2+b(1+x)(1-x)+c(1+x)}{(1+x)(1-x)^2}$$

$$= \frac{(a-b)x^2+(-2a+c)x+(a+b+c)}{x^3-x^2-x+1}$$

따라서 주어진 등식은

$$\frac{6-2x^2}{x^3-x^2-x+1} = \frac{(a-b)x^2+(-2a+c)x+(a+b+c)}{x^3-x^2-x+1}$$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$$a-b=-2, \ -2a+c=0, \ a+b+c=6$$

세 식을 연립하면 $a=1, \ b=3, \ c=2$

$$\therefore abc=1 \cdot 3 \cdot 2=6$$

144

$$\frac{2x^2+(a+1)x+b}{x^2-ax+1} = k(\text{상수}) \text{로 놓으면}$$

$$2x^2+(a+1)x+b=kx^2-akx+k$$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$$2=k, \ a+1=-ak, \ b=k$$

세 식을 연립하면 $k=2, \ a=-\frac{1}{3}, \ b=2$

$$\therefore 3a+b=3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)+2=1$$

145

$$(1) \ 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{x-1+1}{x-1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{x}{x-1}}$$

$$= 1 + \frac{x-1}{x}$$

$$= \frac{x+x-1}{x} = \frac{2x-1}{x}$$

$$(2) \ \frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2-\frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$$

146

(1) 주어진 식을 부분분수로 분해하면

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{1}{(x+1)-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$+ \frac{1}{(x+2)-(x+1)} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right)$$

$$+ \frac{1}{(x+3)-(x+2)} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{x(x+3)}$$

$$(2) \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{49 \cdot 50}$$

$$= \frac{1}{2-1} \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3-2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{4-3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{50-49} \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{50} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$$

$$= 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$$

147

$$\frac{59}{17} = \frac{(17 \times 3) + 8}{17} = 3 + \frac{8}{17} = 3 + \frac{1}{\frac{17}{8}}$$

$$= 3 + \frac{1}{\frac{(8 \times 2) + 1}{8}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{8}}$$

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} \text{과 비교해 보면} \quad a=3, b=2, c=8$$

$$\therefore a+b+c=13$$

148

$$(1) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11$$

$$(2) \quad x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x} \right)^3 + 3 \left(x - \frac{1}{x} \right) = 3^3 + 3 \cdot 3 = 36$$

$$(3) \quad x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 - 2 = 11^2 - 2 = 119$$

149

$$(1) \quad \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 = x + \frac{1}{x} + 2 = 4$$

$$\therefore \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \quad (\because x > 0)$$

$$(2) \quad x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^3 + \frac{1}{(\sqrt{x})^3}$$

$$= \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^3 - 3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$= 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$$

150

$x=0$ 을 $x^2+x-1=0$ 에 대입하면 성립하지 않는다.

따라서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$x+1-\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=-1$$

$$\therefore \frac{x^6-x^5-x-1}{x^3}$$

$$= x^3 - x^2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

$$= \left(x^3 - \frac{1}{x^3} \right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$= \left(x - \frac{1}{x} \right)^3 + 3 \left(x - \frac{1}{x} \right) - \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 - 2$$

$$= (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - (-1)^2 - 2 = -7$$

151

$$(1) \quad \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = k \quad (k \neq 0) \text{라 하면}$$

$$a=2k, b=3k, c=5k$$

이 식을 주어진 식에 대입하면

$$\frac{2a+3b+5c}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 2k + 3 \cdot 3k + 5 \cdot 5k}{2k+3k+5k}$$

$$= \frac{38k}{10k} = \frac{19}{5}$$

$$(2) \quad \frac{2x+y}{3y} = -1 \text{에서 } 2x+y=-3y \quad \therefore x=-2y$$

이 식을 주어진 식에 대입하면

$$\frac{x^2+xy}{xy+y^2} = \frac{(-2y)^2+(-2y) \cdot y}{(-2y) \cdot y+y^2} = \frac{2y^2}{-y^2} = -2$$

152

$$\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{5} = k \quad (k \neq 0) \text{라 하면}$$

$$x+y=3k, y+z=4k, z+x=5k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{의 세 식을 모두 더하면} \quad 2(x+y+z)=12k$$

$$\therefore x+y+z=6k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하여 정리하면} \quad x=2k, y=k, z=3k$$

$$\therefore \frac{x^2+xy+y^2}{y^2+yz+z^2} = \frac{(2k)^2+2k \cdot k+k^2}{k^2+k \cdot 3k+(3k)^2} = \frac{7k^2}{13k^2} = \frac{7}{13}$$

153

$$\begin{cases} x-3y+z=0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x-y-3z=0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1} \times 3 + \textcircled{2}$ 을 하면

$$5x-10y=0 \quad \therefore x=2y \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

㉔을 ㉑에 대입하면

$$-y+z=0 \quad \therefore z=y$$

$$\therefore \frac{x-2y+3z}{x+2y+3z} = \frac{2y-2y+3y}{2y+2y+3y} = \frac{3y}{7y} = \frac{3}{7}$$

154

$$\frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = \frac{x+y}{z} = k \text{에서}$$

(i) $x+y+z \neq 0$ (ii) $x+y+z=0$

인 경우로 나누어 푼다.

(i) $x+y+z \neq 0$ 이면 가비의 리에 의해

$$\begin{aligned} \frac{y+z}{x} &= \frac{z+x}{y} = \frac{x+y}{z} \\ &= \frac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{x+y+z} \end{aligned}$$

$$= \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

$$\therefore k=2$$

(ii) $x+y+z=0$ 이면 $y+z=-x$ 이므로

$$\frac{y+z}{x} = \frac{-x}{x} = -1 \quad \therefore k=-1$$

(i), (ii)에서 $k=2$ 또는 $k=-1$ 이므로 모든 k 의 값의 합은 1이다.

155

양수 x, y 에 대하여 $x+y \neq 0$ 이므로 가비의 리에 의해

$$\begin{aligned} \frac{y}{x-z} &= \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y} = \frac{y+(x+y)+x}{(x-z)+z+y} \\ &= \frac{2(x+y)}{x+y} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \frac{x}{y} = 2 \text{이므로 } x=2y \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{또, } \frac{x+y}{z} = 2 \text{이므로 } \frac{3y}{z} = 2 \quad \therefore z = \frac{3}{2}y \quad \dots \textcircled{2}$$

㉑, ㉒을 주어진 식에 대입하면

$$\frac{x-y+z}{x+y+z} = \frac{2y-y+\frac{3}{2}y}{2y+y+\frac{3}{2}y} = \frac{\frac{5}{2}y}{\frac{9}{2}y} = \frac{5}{9}$$

156

가비의 리에 의해

$$\begin{aligned} \frac{x+2y}{3} &= \frac{3y+z}{4} = \frac{z}{2} \\ &= \frac{p(x+2y)}{3p} = \frac{q(3y+z)}{4q} = \frac{rz}{2r} \\ &= \frac{p(x+2y)+q(3y+z)+rz}{3p+4q+2r} \end{aligned}$$

$$= \frac{px+(2p+3q)y+(q+r)z}{3p+4q+2r}$$

$$\therefore \frac{px+(2p+3q)y+(q+r)z}{3p+4q+2r} = \frac{2x+10y-2z}{a}$$

$$\therefore p=2, 2p+3q=10, q+r=-2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$3p+4q+2r=a \quad \dots \textcircled{2}$$

㉑의 세 식을 연립하면 $p=2, q=2, r=-4$

이를 ㉒에 대입하면

$$a=3p+4q+2r=3 \cdot 2+4 \cdot 2+2 \cdot (-4)=6$$

| 다른 풀이 |

$$\frac{x+2y}{3} = \frac{3y+z}{4} = \frac{z}{2} = k \quad (k \neq 0) \text{라 하면}$$

$$x+2y=3k, 3y+z=4k, z=2k$$

위의 세 식을 연립하면

$$x=\frac{5}{3}k, y=\frac{2}{3}k, z=2k \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{또, } \frac{2x+10y-2z}{a} = k \text{이므로 } 2x+10y-2z=ak$$

이 식에 ㉑을 대입하면

$$2 \cdot \frac{5}{3}k + 10 \cdot \frac{2}{3}k - 2 \cdot 2k = ak \quad \therefore 6k = ak$$

$$\therefore a=6$$

157

문제의 조건을 비례상수를 이용하여 다음과 같이 표로 만들어 보자.

구분	1학기	2학기	1년 전체
시집	s	5t	3k
소설책	3s	3t	5k

(단, s, t, k는 자연수)

이때 1년 동안 읽은 시집과 소설책의 수는

$$s+5t=3k \quad \dots \textcircled{1}, 3s+3t=5k \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \text{을 하면 } 12t=4k \quad \therefore k=3t \quad \dots \textcircled{3}$$

1년 동안 읽은 책의 수는

$$3k+5k=8k=8 \cdot 3t=24t \quad (\because \textcircled{3})$$

따라서 1년 동안 읽은 책의 수는 24의 배수이므로 보기 중 가능한 책의 수는 48권이다.

158

처음에 민수, 철수, 영수가 가지고 놀이를 시작한 딱지의 개수를 각각 k, 2k, 3k라 하고 놀이가 끝난 후의 딱지의 개수를 각각 4t, 5t, 6t라 하자.

이때 놀이 시작과 끝난 후의 딱지의 총 개수는 변함이 없으므로

$$k+2k+3k=4t+5t+6t \quad \therefore 6k=15t \quad \dots\dots ㉠$$

또, 민수는 놀이 후 딱지가 9개 늘어났으므로

$$4t=k+9 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면 $t=6, k=15$

따라서 처음 세 명의 아이들이 가지고 놀기 시작한 딱지의 총 개수는

$$6k=6 \cdot 15=90(\text{개})$$

소단원 연습문제

pp. 116~117

001 ③	002 2	003 1	004 4	005 ②
006 48	007 15	008 ④	009 ④	

001

$$\begin{aligned} & \frac{2x}{x+1} - \frac{x-1}{x} + \frac{x-1}{x(x+1)} \\ &= \frac{2x^2 - (x+1)(x-1) + x-1}{x(x+1)} \\ &= \frac{x^2+x}{x(x+1)} = \frac{x^2+x}{x^2+x} = 1 \end{aligned}$$

002

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} + \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} &= \frac{x}{1-\frac{x}{x+1}} + \frac{1}{1-\frac{x}{x-1}} \\ &= \frac{x(x+1)}{(x+1)-x} + \frac{x-1}{(x-1)-x} \\ &= x(x+1) - (x-1) \\ &= x^2+1=5 \\ \therefore x^2 &= 4 \\ \therefore x &= 2 \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

003

$xyz=1$ 이므로 $z=\frac{1}{xy}$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} & \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{zx+z+1} + \frac{x}{xy+x+1} \\ &= \frac{y}{y \cdot \frac{1}{xy} + y + 1} + \frac{\frac{1}{xy}}{\frac{1}{xy} \cdot x + \frac{1}{xy} + 1} + \frac{x}{xy+x+1} \\ &= \frac{xy}{xy+x+1} + \frac{1}{x+1+xy} + \frac{x}{xy+x+1} \\ &= \frac{xy+x+1}{xy+x+1} = 1 \end{aligned}$$

004

$x^2-3x+1=0$ 에서 양변을 x 로 나누면

$$x-3+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=3$$

곱셈 공식의 변형에 의해

$$\begin{aligned} x^2+\frac{1}{x^2} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7 \\ x^3+\frac{1}{x^3} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 18 \\ \therefore \frac{x^6-2x^5-2x+1}{x^3} &= x^3-2x^2-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3} \\ &= x^3+\frac{1}{x^3}-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 18-2 \cdot 7 = 4 \end{aligned}$$

005

주어진 식의 각 항을 부분분수로 분해하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+2)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) \\ \frac{1}{(x+2)(x+4)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &\dots \\ \frac{1}{(x+98)(x+100)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+98} - \frac{1}{x+100} \right) \\ \therefore \frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{(x+98)(x+100)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+98} - \frac{1}{x+100} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x+98} - \frac{1}{x+100} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+100} \right) = \frac{50}{x(x+100)} \\ \therefore k &= 50 \end{aligned}$$

006

$3a+2b+c \neq 0$ 이므로 가비의 리에 의해

$$\begin{aligned} \frac{2b+c}{3a} &= \frac{c+3a}{2b} = \frac{3a+2b}{c} = \frac{6a+4b+2c}{3a+2b+c} = 2 \\ \therefore 2b+c &= 6a, \quad c+3a=4b, \quad 3a+2b=2c \\ \therefore \frac{(3a+2b)(2b+c)(c+3a)}{abc} &= \frac{2c \cdot 6a \cdot 4b}{abc} \\ &= \frac{48abc}{abc} = 48 \end{aligned}$$

007

$$x+y-z=2x+3y-2z \text{에서} \quad x+2y=z \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x+y-z=-x-2y+2z \text{에서} \quad 2x+3y=3z \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하면 $y=-z, x=3z$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{z}\right) : \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{x}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right) \\ = \left(\frac{1}{-z} + \frac{2}{z}\right) : \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{3z}\right) : \left(\frac{1}{3z} - \frac{2}{-z}\right) \\ = \frac{1}{z} : \frac{5}{3z} : \frac{7}{3z} = 3 : 5 : 7 \end{aligned}$$

따라서 $a=3, b=5, c=7$ 이므로

$$a+b+c=3+5+7=15$$

008

올라갈 때와 내려올 때 걸린 시간의 비가 2 : 1이므로

올라갈 때 걸린 시간은 $2t$, 내려올 때 걸린 시간은 t

그런데 모두 6시간이 걸렸으므로

$$2t+t=6 \quad \therefore t=2$$

따라서 올라갈 때 4시간, 내려올 때 2시간이 걸렸다.

또, 올라갈 때와 내려올 때의 평균속력의 비가 2 : 3이므로

올라갈 때의 평균속력은 $2v$, 내려올 때의 평균속력은 $3v$

그런데 총 이동거리가 21km이므로

$$2v \times 4 + 3v \times 2 = 21v = 21 \quad \therefore v = \frac{3}{2}$$

올라갈 때의 평균속력은 3, 내려올 때의 평균속력은 $\frac{9}{2}$ 이다.

따라서 올라갈 때의 거리는 $3 \times 4 = 12(\text{km})$

009

2005년도의 매출액을 a , 2006년도 매출액을 b , 2007년도 매출액을 c 라 하자.

2006년도 성장률은

$$\frac{b-a}{a} \times 100 = 20(\%) \quad \therefore b = \frac{6}{5}a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

2007년도 성장률은

$$\frac{c-b}{b} \times 100 = 50(\%) \quad \therefore c = \frac{3}{2}b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①에 ①을 대입하면 $c = \frac{3}{2}b = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5}a = \frac{9}{5}a$

2008년도의 매출액은 $3a$ 이므로 2008년도 성장률은

$$\begin{aligned} \frac{3a-c}{c} \times 100 &= \frac{3a - \frac{9}{5}a}{\frac{9}{5}a} \times 100 = \frac{\frac{6}{5}a}{\frac{9}{5}a} \times 100 \\ &= \frac{2}{3} \times 100 \approx 67(\%) \end{aligned}$$

02 무리식

개념 확인 문제

p. 119

$$1 \quad (1) x \leq \frac{2}{3} \quad (2) 0 \leq x \leq 2 \quad \mathbf{2 \quad 1}$$

$$3 \quad (1) \sqrt{2}+1 \quad (2) \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$4 \quad (1) 4 \quad (2) -1 \quad (3) -1 \quad (4) \frac{3}{2}\sqrt{3}+\sqrt{5}-\frac{1}{2}$$

$$5 \quad (1) \sqrt{3}+\sqrt{2} \quad (2) 2-\sqrt{2} \quad (3) 2-\sqrt{3} \quad (4) \frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$$

1

$$(1) 2-3x \geq 0 \text{이어야 하므로} \quad x \leq \frac{2}{3}$$

$$(2) \sqrt{x} \text{에서} \quad x \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\sqrt{2-x} \text{에서} \quad 2-x \geq 0 \quad \therefore x \leq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는

$$0 \leq x \leq 2$$

2

$$1 < x < 2 \text{에서} \quad x-1 > 0, x-2 < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|, \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2} &= |x-1| + |x-2| \\ &= (x-1) - (x-2) \quad (\because \textcircled{㉠}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

3

$$(1) \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

4

$$(1) \sqrt{2^2} + \sqrt{(-2)^2} = |2| + |-2| = 2+2=4$$

$$(2) (\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = -1$$

$$\begin{aligned} (3) \sqrt{\frac{6}{5}} \left(\sqrt{\frac{10}{3}} - \sqrt{\frac{15}{2}} \right) &= \sqrt{\frac{6}{5} \cdot \frac{10}{3}} - \sqrt{\frac{6}{5} \cdot \frac{15}{2}} \\ &= \sqrt{2^2} - \sqrt{3^2} \\ &= 2-3=-1 \end{aligned}$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{3} + \sqrt{5} - \frac{1}{2}$$

5

- (1) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{(3+2)+2\sqrt{3}\cdot 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$
 (2) $\sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{6-2\sqrt{8}} = \sqrt{4-\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$
 (3) $\sqrt{7-\sqrt{48}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = \sqrt{4-\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$
 (4) $\sqrt{4+\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{8+2\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$

유 제

pp. 120~125

- 159 (1) $\frac{\sqrt{2x+1}-x}{x}$ (2) $\sqrt{x-1}$ 160 2 161 4
 162 (1) $\sqrt{6}+\sqrt{7}$ (2) $\sqrt{6}$ (3) -2 (4) -4 163 2
 164 5 165 (1) $x=1, y=-2$ (2) $x=1, y=4$
 166 2 167 4 168 11 169 $\frac{4}{3}$ 170 3
 171 (1) $2\sqrt{2}$ (2) 970 172 $\sqrt{2}-1$ 173 $\frac{1}{a}$ 174 $\sqrt{5}$
 175 $\frac{1}{5}$ 176 11

159

- (1) $\frac{x+1}{1+\sqrt{2x+1}} + \frac{x-1}{1-\sqrt{2x+1}}$

$$= \frac{(x+1)(1-\sqrt{2x+1}) + (x-1)(1+\sqrt{2x+1})}{(1+\sqrt{2x+1})(1-\sqrt{2x+1})}$$

$$= \frac{x-x\sqrt{2x+1}+1-1-\sqrt{2x+1}+x+x\sqrt{2x+1}-1-1-\sqrt{2x+1}}{1^2-(\sqrt{2x+1})^2}$$

$$= \frac{2(x-\sqrt{2x+1})}{1-(2x+1)} = \frac{\sqrt{2x+1}-x}{x}$$

(2) $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

$$= \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}$$

$$= \frac{2\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{x-1}}{(x+1)-(x-1)} = \sqrt{x-1}$$

160

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1} - \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{(x + \sqrt{x^2+1})(x - \sqrt{x^2+1})}$$

$$= x + \sqrt{x^2+1} - \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{-1}$$

$$= x + \sqrt{x^2+1} + x - \sqrt{x^2+1} = 2x$$

$f(x) = 2x$ 이므로 $f(x) = 4$ 에서 $2x = 4$
 $\therefore x = 2$

161

각각의 분모를 유리화하면

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = -\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}} = \frac{\sqrt{79}-\sqrt{81}}{(\sqrt{79}+\sqrt{81})(\sqrt{79}-\sqrt{81})}$$

$$= -\frac{1}{2}(\sqrt{79}-\sqrt{81})$$

$$\therefore \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$$

$$= -\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) - \frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5}) - \dots$$

$$- \frac{1}{2}(\sqrt{79}-\sqrt{81})$$

$$= -\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\dots+\sqrt{79}-\sqrt{81})$$

$$= -\frac{1}{2}(1-\sqrt{81}) = -\frac{1}{2}(1-9) = 4$$

162

- (1) $\sqrt{9+6\sqrt{2}} = \sqrt{9+2\sqrt{18}}$

$$= \sqrt{(3+6)+2\sqrt{3}\cdot 6}$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

$$\sqrt{10-2\sqrt{21}} = \sqrt{(7+3)-2\sqrt{7}\cdot 3}$$

$$= \sqrt{7} - \sqrt{3}$$

$$\therefore \sqrt{9+6\sqrt{2}} + \sqrt{10-2\sqrt{21}} = \sqrt{6} + \sqrt{7}$$

(2) $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

(3) $\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = \sqrt{(x+1)+1-2\sqrt{(x+1)\cdot 1}}$

$$= \sqrt{x+1}-1 \quad (\because x+1 > 1)$$

$$\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} = \sqrt{(x+1)+1+2\sqrt{(x+1)\cdot 1}}$$

$$= \sqrt{x+1}+1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1} \\ =\sqrt{x+1}-1-\sqrt{x+1}-1 \\ =-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \sqrt{4+x}-\sqrt{16x} &= \sqrt{4+x-2\sqrt{4x}} = \sqrt{x}-2 \quad (\because x>4) \\ \sqrt{4+x}+\sqrt{16x} &= \sqrt{4+x+2\sqrt{4x}} = \sqrt{x}+2 \\ \therefore \sqrt{4+x}-\sqrt{16x}-\sqrt{4+x}+\sqrt{16x} \\ &= \sqrt{x}-2-(\sqrt{x}+2) \\ &= -4 \end{aligned}$$

163

$$\begin{aligned} \sqrt{17+2\sqrt{72}} &= \sqrt{(9+8)+2\sqrt{9 \cdot 8}} = 3+2\sqrt{2} \text{이므로} \\ \sqrt{\sqrt{17+2\sqrt{72}}} &= \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{17-2\sqrt{72}} &= \sqrt{(9+8)-2\sqrt{9 \cdot 8}} = 3-2\sqrt{2} \text{이므로} \\ \sqrt{\sqrt{17-2\sqrt{72}}} &= \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 \\ \therefore \sqrt{\sqrt{17+2\sqrt{72}}}-\sqrt{\sqrt{17-2\sqrt{72}}} &= \sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

164

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-\sqrt{3}} &= \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3} \\ \therefore \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}+5+3\sqrt{3} &= \sqrt{2+\sqrt{3}+5+3\sqrt{3}} = \sqrt{7+4\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{7+2\sqrt{12}} = 2+\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+\sqrt{b} \text{와 비교하면} \quad a=2, b=3 \\ \therefore a+b=5 \end{aligned}$$

165

$$\begin{aligned} (1) x, y \text{가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의해} \\ x+2=3, -(y-x+1)=2 \\ \therefore x=1, y=-2 \\ (2) \text{주어진 식의 좌변을 전개하여 정리하면} \\ (x+2y)+(x+y)\sqrt{2}=9+5\sqrt{2} \\ x, y \text{가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의해} \\ x+2y=9, x+y=5 \\ \therefore x=1, y=4 \end{aligned}$$

166

$$\begin{aligned} \text{주어진 식의 좌변을 유리화한 후 정리하면} \\ a(3-2\sqrt{2})+b\sqrt{2}(3+2\sqrt{2}) &= 7+\sqrt{2} \\ (3a+4b)+(-2a+3b)\sqrt{2} &= 7+\sqrt{2} \\ a, b \text{가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의해} \\ 3a+4b=7, -2a+3b &= 1 \\ \therefore a=1, b=1 \quad \therefore a+b &= 2 \end{aligned}$$

167

$$\begin{aligned} x=\sqrt{5}-1, y=\sqrt{5} \text{를 } y=ax^2+bx \text{에 대입하면} \\ \sqrt{5} &= a(\sqrt{5}-1)^2+b(\sqrt{5}-1) \\ &= a(6-2\sqrt{5})+b(\sqrt{5}-1) \\ &= 6a-b+(-2a+b)\sqrt{5} \\ a, b \text{가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의해} \\ 6a-b &= 0, -2a+b=1 \\ \therefore a &= \frac{1}{4}, b = \frac{3}{2} \\ \therefore 4a+2b &= 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{2} = 1+3=4 \end{aligned}$$

168

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-\sqrt{3}} &= \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3} \\ \text{이때 } \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4} \text{이므로} \quad 3 < 2+\sqrt{3} < 4 \\ \text{따라서 } 2+\sqrt{3} \text{의 정수 부분 } a, \text{ 소수 부분 } b \text{를 구하면} \\ a=3, b &= (2+\sqrt{3})-3 = \sqrt{3}-1 \\ \therefore a^2+2b+b^2 &= 3^2+2(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)^2 \\ &= 9+2\sqrt{3}-2+3-2\sqrt{3}+1=11 \end{aligned}$$

169

$$\begin{aligned} \sqrt{6+2\sqrt{8}} &= \sqrt{(4+2)+2\sqrt{4 \cdot 2}} = \sqrt{4}+\sqrt{2} = 2+\sqrt{2} \\ \text{이때 } \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} \text{이므로} \quad 3 < 2+\sqrt{2} < 4 \\ \text{따라서 } 2+\sqrt{2} \text{의 정수 부분 } a, \text{ 소수 부분 } b \text{를 구하면} \\ a=3, b &= (2+\sqrt{2})-3 = \sqrt{2}-1 \\ \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \sqrt{2} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{3} + (\sqrt{2}+1) - \sqrt{2} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

170

$$\begin{aligned} \sqrt{11+4\sqrt{4-2\sqrt{3}}} &= \sqrt{11+4(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{11+4\sqrt{3}-4} \\ &= \sqrt{7+2\sqrt{12}} = 2+\sqrt{3} \\ \text{이때 } \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4} \text{이므로} \quad 3 < 2+\sqrt{3} < 4 \\ \text{따라서 } 2+\sqrt{3} \text{의 정수 부분 } x, \text{ 소수 부분 } y \text{를 구하면} \\ x=3, y &= (2+\sqrt{3})-3 = \sqrt{3}-1 \\ \therefore \frac{1}{x+y} + \frac{2}{y} \\ &= \frac{1}{3+\sqrt{3}-1} + \frac{2}{\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} + \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} \\ &= 2-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1=3 \end{aligned}$$

171

$$\begin{aligned}
 (1) \ x &= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 3+2\sqrt{2} \\
 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} &= \frac{(\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\
 &= \frac{2(x+1)}{x-1} \\
 \therefore \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} &= \frac{2(3+2\sqrt{2}+1)}{3+2\sqrt{2}-1} \\
 &= \frac{4(2+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{1+\sqrt{2}} \\
 &= 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \ x &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = 5+2\sqrt{6} \\
 y &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = 5-2\sqrt{6} \\
 x+y, xy \text{의 값을 각각 구하면} \\
 x+y &= 5+2\sqrt{6} + (5-2\sqrt{6}) = 10 \\
 xy &= (5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6}) = 1 \\
 \therefore x^3+y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\
 &= 10^3 - 3 \cdot 10 = 970
 \end{aligned}$$

172

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1 \\
 y &= \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1 \\
 x+y, x-y, xy \text{의 값을 각각 구하면} \\
 x+y &= 2\sqrt{2}, \quad x-y=2, \quad xy=1 \\
 \therefore \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \\
 &= \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2}-1
 \end{aligned}$$

173

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1+a^2}{a} \text{ 이므로 } x+2, x-2 \text{를 각각 구하면} \\
 x+2 &= \frac{1+a^2}{a} + 2 = \frac{(a+1)^2}{a} \\
 x-2 &= \frac{1+a^2}{a} - 2 = \frac{(a-1)^2}{a} \\
 \therefore \sqrt{x+2} &= \frac{|a+1|}{\sqrt{a}} = \frac{a+1}{\sqrt{a}} \quad (\because a+1>0) \\
 \sqrt{x-2} &= \frac{|a-1|}{\sqrt{a}} = \frac{1-a}{\sqrt{a}} \quad (\because a-1<0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} &= \frac{\frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{1-a}{\sqrt{a}}}{\frac{a+1}{\sqrt{a}} - \frac{1-a}{\sqrt{a}}} \\
 &= \frac{(a+1)+(1-a)}{(a+1)-(1-a)} \\
 &= \frac{1}{a}
 \end{aligned}$$

174

$$x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ 에서 } 2x-1 = \sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\begin{aligned}
 4x^2-4x+1 &= 5 \quad \therefore x^2-x-1=0 \\
 \therefore x^3-2 &= x(x^2-x-1) + x^2+x-2 \\
 &= x^2+x-2 \\
 &= (x^2-x-1) + 2x-1 \\
 &= 2x-1 = \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

175

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1 \text{ 이므로} \\
 x+1 &= \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\begin{aligned}
 x^2+2x+1 &= 3 \quad \therefore x^2+2x-2=0 \\
 \text{주어진 식의 분자와 분모를 각각 변형하면} \\
 x^3+4x^2+2x-3 &= x(x^2+2x-2) + 2x^2+4x-3 \\
 &= 2x^2+4x-3 \\
 &= 2(x^2+2x-2) + 1 = 1 \\
 2x^2+4x+1 &= 2(x^2+2x-2) + 5 = 5 \\
 \therefore \frac{x^3+4x^2+2x-3}{2x^2+4x+1} &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

176

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{10+8\sqrt{3}+\sqrt{8}} = \sqrt{10+8\sqrt{3}+2\sqrt{2}} = \sqrt{10+8(\sqrt{2}+1)} \\
 &= \sqrt{18+2\sqrt{32}} = 4+\sqrt{2} \\
 \therefore x-4 &= \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\begin{aligned}
 x^2-8x+16 &= 2 \quad \therefore x^2-8x+14=0 \\
 \text{주어진 식을 변형하면} \\
 2x^3-16x^2+30x+1 &= 2x(x^2-8x+14) + 2x+1 \\
 &= 2x+1 = 2(4+\sqrt{2}) + 1 \\
 &= 9+2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

그런데 $2\sqrt{2}=2.\times\times\times$ 이므로

$$11 < 9+2\sqrt{2} < 12$$

따라서 주어진 식의 값의 정수 부분은 11이다.

001 ④	002 6	003 63	004 1	005 $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
006 ④	007 5	008 6	009 9	

001

무리식의 값이 실수가 되려면 (근호 안의 값) ≥ 0 이어야 하므로

$$\sqrt{3-x} \text{에서 } 3-x \geq 0 \quad \therefore x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}} \text{에서 } x+2 > 0 \quad \therefore x > -2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는

$$-2 < x \leq 3$$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 으로 5개이다.

002

주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\sqrt{2x^2-5x} + \sqrt{2y^2-5y} = 13\sqrt{2}-5\sqrt{5}$$

$$(x^2+y^2)\sqrt{2} - (x+y)\sqrt{5} = 13\sqrt{2}-5\sqrt{5}$$

x, y 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의해

$$x^2+y^2=13, \quad x+y=5$$

곱셈 공식 $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$ 에서

$$5^2 = 13 + 2xy \quad \therefore xy = 6$$

003

$$x = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{8+2\sqrt{15}}{2} = 4+\sqrt{15}$$

$$y = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{8-2\sqrt{15}}{2} = 4-\sqrt{15}$$

$x+y, xy$ 의 값을 각각 구하면

$$x+y=8, \quad xy=1$$

$$\therefore x^2+xy+y^2 = (x+y)^2 - xy = 8^2 - 1 = 63$$

004

$\sqrt{x} = \frac{1}{3}(1-a)$ 의 양변을 제곱하면

$$x = \frac{1}{9}(1-a)^2 \quad \therefore 9x = (1-a)^2$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} & \sqrt{9x+4a} + \sqrt{9x+6a+3} \\ &= \sqrt{(1-a)^2+4a} + \sqrt{(1-a)^2+6a+3} \\ &= \sqrt{a^2+2a+1} + \sqrt{a^2+4a+4} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a+2)^2}$$

$$= |a+1| + |a+2|$$

$$= -a-1+a+2 \quad (\because -2 < a < -1)$$

$$= 1$$

005

$$\sqrt{13+\sqrt{48}} = \sqrt{13+2\sqrt{12}} = \sqrt{12}+1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}} &= \sqrt{5-\sqrt{12}-1} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3}-1 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } 1 < \sqrt{3} < 2 \text{이므로 } 0 < \sqrt{3}-1 < 1$$

따라서 $\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}$ 의 정수 부분은 0

소수 부분은 $\sqrt{3}-1$

$$\therefore x = \sqrt{3}-1$$

따라서 주어진 식을 변형하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} - \frac{1}{\sqrt{x+2}-1} &= \frac{\sqrt{x+2}-1 - (\sqrt{x+2}+1)}{(\sqrt{x+2}+1)(\sqrt{x+2}-1)} \\ &= -\frac{2}{x+1} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}-1+1} \quad (\because x = \sqrt{3}-1) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

006

$$x = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{에서 } 2x+1 = \sqrt{3}i$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4x^2+4x+1 = -3 \quad \therefore x^2+x+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

①의 양변을 x 로 나누면

$$x+1+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=-1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

또, ①의 양변에 $x-1$ 을 곱하면

$$(x-1)(x^2+x+1)=0 \quad \therefore x^3-1=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

①, ②, ③을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} &= \frac{x}{-x^2} + \frac{x^2}{-x} + \frac{1}{1+1} \\ &= -\left(x+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

007

$$a-b = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$b-c=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{A}+\textcircled{L} \text{을 하면} \quad a-c=\sqrt{6} \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \\ &= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})+6\} (\because \textcircled{A}, \textcircled{L}, \textcircled{E}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10=5 \end{aligned}$$

008

$\sqrt{n}$ 의 정수 부분이 a 이고 소수 부분이 b 이므로

$$b=\sqrt{n}-a, a+b=\sqrt{n}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} a^3-9ab+b^3 \\ &=a^3+b^3-9ab \\ &=(a+b)^3-3ab(a+b)-9ab \\ &=(\sqrt{n})^3-3a(\sqrt{n}-a)\cdot\sqrt{n}-9a(\sqrt{n}-a) \\ &=n\sqrt{n}-3an+3a^2\sqrt{n}-9a\sqrt{n}+9a^2 \\ &=(9a^2-3an)+(3a^2-9a+n)\sqrt{n}=0 \end{aligned}$$

a, n 이 유리수이고 $\sqrt{n}$ 이 무리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의해

$$9a^2-3an=0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$3a^2-9a+n=0 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{A}$ 에서 $3a(3a-n)=0$ 이므로

$$n=3a (\because a=0 \text{이면 } \textcircled{L} \text{에서 } n=0 \text{ 이므로 모순})$$

이를 $\textcircled{L}$ 에 대입하면 $3a^2-9a+3a=0$

$$3a(a-2)=0 \quad \therefore a=2 \quad \therefore n=6$$

009

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{4x^2+4x}=\sqrt{2x+1+2\sqrt{x(x+1)}}=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$$

이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{4x^2+4x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \\ &= -\sqrt{x}+\sqrt{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(99) \\ &= (-\sqrt{1}+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})+(-\sqrt{3}+\sqrt{4})+\dots \\ &\quad +(-\sqrt{99}+\sqrt{100}) \\ &= -\sqrt{1}+\sqrt{100} \\ &= -1+10=9 \end{aligned}$$

중단원 연습문제

pp. 128~130

001 -6	002 0	003 $1-a^2$	004 0	005 ③
006 -3	007 5	008 7	009 60	010 $3+\sqrt{3}$
011 $\frac{50}{101}$	012 $\frac{3}{5}$	013 1	014 -17	015 28

001

주어진 식의 우변을 통분하여 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{-7x-4}{x(x^2-x-2)} &= \frac{a(x+1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)} \\ \frac{-7x-4}{x(x^2-x-2)} &= \frac{(a+b+c)x^2+(-a-2b+c)x-2a}{x(x^2-x-2)} \end{aligned}$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$a+b+c=0, -a-2b+c=-7, -2a=-4$$

세 식을 연립하면 $a=2, b=1, c=-3$

$$\therefore abc=2 \cdot 1 \cdot (-3)=-6$$

002

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-2y}{1+2y} \text{에서 } (1+x)(1+2y)=(1-x)(1-2y)$$

$$1+x+2y+2xy=1-x-2y+2xy$$

$$x+2y=0 \quad \therefore x=-2y \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+3z}{1-3z} \text{에서 } (1+x)(1-3z)=(1-x)(1+3z)$$

$$1+x-3z-3xz=1-x+3z-3xz$$

$$x-3z=0 \quad \therefore x=3z \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{L} \text{에서} \quad y=-\frac{1}{2}x, z=\frac{1}{3}x$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\frac{xy-yz+zx}{x^2-y^2+z^2}=\frac{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x^2}{x^2-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}x^2}=\frac{0 \cdot x^2}{\frac{31}{36}x^2}=0$$

003

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{a}}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{a}}} &= \frac{1}{1-\frac{a}{a-1}} \times \frac{1}{1-\frac{a}{a+1}} \\ &= \frac{a-1}{(a-1)-a} \times \frac{a+1}{(a+1)-a} \\ &= (1-a) \times (1+a)=1-a^2 \end{aligned}$$

004

$$\begin{aligned} \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \\ = -\frac{a}{(a-b)(c-a)} - \frac{b}{(a-b)(b-c)} - \frac{c}{(c-a)(b-c)} \end{aligned}$$

$$= -\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= -\frac{ab-ac+bc-ab+ac-bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$$

005

$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$ 이므로

$$x=\sqrt{15-6\sqrt{3}+2(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\sqrt{13-4\sqrt{3}}=\sqrt{13-2\sqrt{12}}$$

$$=\sqrt{12}-1=2\sqrt{3}-1$$

$$\approx 2 \times 1.732 - 1 = 2.464$$

006

$$\sqrt{3}a \triangle b = \sqrt{3}a + b\sqrt{3} = (a+b)\sqrt{3}$$

$$a \triangle \sqrt{3}b = a + \sqrt{3}b \cdot \sqrt{3} = a + 3b$$

이므로 주어진 식은

$$(\sqrt{3}a \triangle b) + (a \triangle \sqrt{3}b) = 1 - \sqrt{3}$$

$$a + 3b + (a + b)\sqrt{3} = 1 - \sqrt{3}$$

a, b가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의해

$$a + 3b = 1, a + b = -1$$

두 식을 연립하면 $a = -2, b = 1$

$$\therefore a - b = (-2) - 1 = -3$$

007

$$1 < \sqrt{3} < 2 \text{이므로 } 3 < 5 - \sqrt{3} < 4$$

따라서 $5 - \sqrt{3}$ 의 정수 부분 a, 소수 부분 b를 구하면

$$a = 3, b = (5 - \sqrt{3}) - 3 = 2 - \sqrt{3}$$

$$\therefore a^2 - \left(b + \frac{1}{b}\right) = 3^2 - \left(2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right)$$

$$= 9 - (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3})$$

$$= 9 - 4 = 5$$

008

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 1 \text{이므로}$$

$$x - \frac{1}{x} = 1 \left(\because x - \frac{1}{x} > 0 \right)$$

$$\text{또, } x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = 1^3 + 3 \cdot 1 = 4$$

$$\therefore x^3 + 3x - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} = x^3 - \frac{1}{x^3} + 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 4 + 3 \cdot 1 = 7$$

009

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3}-1$$

$$\therefore x+y=2\sqrt{3}, xy=2$$

$$\text{또, } x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{3})^2-2 \cdot 2=8$$

$$\therefore x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$$

$$=8^2-2^2=60$$

010

$$2x = \sqrt{28+2\sqrt{192}} = \sqrt{16+12+2\sqrt{16 \cdot 12}}$$

$$= \sqrt{16} + \sqrt{12} = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$\text{이므로 } x = 2 + \sqrt{3} \quad \therefore x - 2 = \sqrt{3}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 - 4x + 4 = 3 \quad \therefore x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\therefore x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 4x + 1) - x^2 + 5x$$

$$= -(x^2 - 4x + 1) + x + 1$$

$$= x + 1 = 2 + \sqrt{3} + 1$$

$$= 3 + \sqrt{3}$$

011

f(x)를 부분분수로 분해하면

$$f(x) = \frac{1}{4x^2-1} = \frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right)$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

$$+ \frac{1}{99} - \frac{1}{101}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{101} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{101} = \frac{50}{101}$$

012

$$\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 3 \text{이므로 } \overline{AC} = 2k \text{라 하면 } \overline{BC} = 6k$$

이때 a는 반지름의 길이가 k인 반원의 넓이이므로

$\frac{1}{2}k^2$, b는 반지름의 길이가 $3k$ 인 반원의 넓이이므로 $\frac{9}{2}k^2$ 이다.

또, $\overline{AB}=8k$ 이므로 c는 반지름의 길이가 $4k$ 인 반원의 넓이에서 a, b를 뺀 것과 같으므로

$$c = \frac{16}{2}k^2 - \frac{1}{2}k^2 - \frac{9}{2}k^2 = 3k^2$$

$$\therefore \frac{c}{a+b} = \frac{3k^2}{\frac{1}{2}k^2 + \frac{9}{2}k^2} = \frac{3k^2}{5k^2} = \frac{3}{5}$$

013

$$\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \dots = 2 \text{이므로} \quad \sqrt{x+2} = 2$$

양변을 제곱하면

$$x+2=4 \quad \therefore x=2$$

$$\frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \dots}}} = y \text{라 하고 } x=2 \text{를 대입하면}$$

$$\frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \dots}}} = y, \quad \frac{1}{2-y} = y$$

$$1 = (2-y)y$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$(y-1)^2 = 0$$

$$\therefore y=1$$

014

$[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이므로 x 의 정수 부분을 의미하고, $x-[x]$ 는 x 에서 정수 부분 $[x]$ 를 뺀 값이므로 x 의 소수 부분을 의미한다.

$$x = \frac{1}{4-\sqrt{15}} = \frac{4+\sqrt{15}}{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})} = 4+\sqrt{15}$$

이때 $\sqrt{9} < \sqrt{15} < \sqrt{16}$ 이므로

$$7 < 4+\sqrt{15} < 8$$

따라서 x 의 정수 부분은 7

소수 부분은 $(4+\sqrt{15})-7=\sqrt{15}-3$

$$\therefore [x]=7, \quad x-[x]=\sqrt{15}-3$$

$$\therefore \frac{6}{x-[x]} - \frac{[x]}{x}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{15}-3} - \frac{7}{4+\sqrt{15}}$$

$$= \frac{6(\sqrt{15}+3)}{(\sqrt{15}-3)(\sqrt{15}+3)} - \frac{7(4-\sqrt{15})}{(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})}$$

$$= \sqrt{15}+3-7(4-\sqrt{15})$$

$$= -25+8\sqrt{15} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

㉠과 $a+b\sqrt{15}$ 를 비교해 보면 $a=-25$, $b=8$ 이므로

$$a+b=-17$$

채점 영역	단계	채점 요소	배점 비율
문제 이해 &	㉠	문제를 이해하고 x의 근사값 구하기	30%
	㉡	x의 정수 부분, 소수 부분 구하기	20%
해결 과정	㉢	주어진 식의 값 구하기	30%
답 구하기	㉣	a+b의 값 구하기	20%

015

문제의 조건을 표로 만들면 다음과 같다.

구분	A	B
시간당 전력 사용량	5k	6k
충전지의 용량	4m	3m
10시간 재생 후 남은 양	4m-50k	3m-60k

이때 10시간 재생 후 남은 양의 비가 2 : 1이므로

$$(4m-50k) : (3m-60k) = 2 : 1$$

비례식의 성질에 의해

$$2(3m-60k) = 4m-50k$$

$$6m-120k = 4m-50k$$

$$\therefore m=35k$$

$$\therefore \frac{m}{k} = 35$$

따라서 기기 A의 재생시간은 충전지의 용량을 시간당 전력 사용량으로 나눈 것과 같으므로

$$\frac{4m}{5k} = \frac{4}{5} \times \frac{m}{k}$$

$$= \frac{4}{5} \times 35 = 28(\text{시간})$$

채점 영역	단계	채점 요소	배점 비율
문제 이해 &	㉠	주어진 조건을 비례상수를 이용하여 나타내기	30%
	㉡	10시간 재생 결과 남은 양을 이용하여 관계식 구하기	20%
해결 과정	㉢	관계식을 이용하여 m, k의 관계 구하기	20%
답 구하기	㉣	기기 A의 재생시간 구하기	30%

001 65

002 ②

003 3

004 ③

001

$\frac{20}{17}$ 의 정수 부분은 1이므로 주어진 공식에 의하여

$$\frac{17}{20} = \frac{1}{1+1} + \frac{(1+1) \cdot 17 - 20}{(1+1) \cdot 20} = \frac{1}{2} + \frac{7}{20}$$

또, $\frac{20}{7}$ 의 정수 부분은 2이므로 주어진 공식에 의해

$$\frac{7}{20} = \frac{1}{2+1} + \frac{(2+1) \cdot 7 - 20}{(2+1) \cdot 20} = \frac{1}{3} + \frac{1}{60}$$

$$\therefore \frac{17}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{60}$$

따라서 $p+q+r=2+3+60=65$

002

$\sqrt{a-2\sqrt{108}}$ 의 이중근호를 풀려면 더해서 a, 곱해서 108인 두 수를 찾아야 한다.

$$\sqrt{a-2\sqrt{108}} = \sqrt{b} - \sqrt{c} \text{이므로}$$

$$a=b+c, bc=108, b>c$$

이때 $bc=108$ 이므로 b와 c는 108의 약수이다.

따라서 b, c의 값과 그 때의 a의 값을 표로 나타내어 보면 다음과 같다.

b	1	2	3	4	6	9	12	18	27	36	54	108
c	108	54	36	27	18	12	9	6	4	3	2	1
a	109	56	39	31	24	21	21	24	31	39	56	109

그런데 $b>c$ 이므로 조건을 만족하는 것은 위의 표에 있는 12개 중 6개 뿐이므로 순서쌍 (a, b, c)도 6개이다.

003

$$f(x) = \sqrt{1+x} \sqrt{1+(x+1)} \sqrt{1+(x+2)} \sqrt{1+\dots}$$

.....㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$$\{f(x)\}^2 = 1+x\sqrt{1+(x+1)}\sqrt{1+(x+2)}\sqrt{1+\dots}$$

.....㉡

㉠에 x대신 x+1을 대입하면

$$f(x+1) = \sqrt{1+(x+1)}\sqrt{1+(x+2)}\sqrt{1+(x+3)}\sqrt{1+\dots}$$

.....㉢

$$\text{㉡, ㉢에서 } \{f(x)\}^2 = 1+xf(x+1)$$

.....㉣

이때 f(x)의 차수를 n이라 하면 좌변과 우변의 차수는 각각 2n, n+1이고 양변의 차수는 같아야 하므로

$$2n=n+1 \quad \therefore n=1$$

따라서 f(x)는 일차식이므로 $f(x)=ax+b$ 로 놓으면

㉣에서

$$(ax+b)^2 = 1+x[a(x+1)+b]$$

$$a^2x^2+2abx+b^2 = ax^2+(a+b)x+1$$

양변의 계수를 비교하면

$$a=1, b=1 \quad \therefore f(x)=x+1$$

$$\therefore f(2)=2+1=3$$

004

코스의 출발점을 A, 반환점을

B라 할 때, 오른쪽 그림과 같이

갈 때의 오르막, 평지, 내리막의

거리를 각각 a, b, c라 하면

가는 데 걸리는 시간은

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{6}$$

돌아오는 데 걸리는 시간은

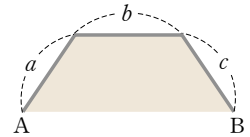
$$\frac{c}{3} + \frac{b}{4} + \frac{a}{6}$$

이 코스를 왕복하는 데 걸리는 시간이 2시간이므로

$$\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{6}\right) + \left(\frac{c}{3} + \frac{b}{4} + \frac{a}{6}\right) = 2$$

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 2 \quad \therefore a+b+c=4(\text{km})$$

따라서 전체 코스의 왕복거리는 $4 \times 2 = 8(\text{km})$ 이고, 평지의 거리는 그 절반이므로 4 km이다.





01 일차방정식과 이차방정식

개념 확인 문제

p. 135

- 1 (1) $x=2$ (2) $x=-2$
 (3) 해가 없다. (4) 해가 무수히 많다.
 2 (1) $x=1$ 또는 $x=3$ (2) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$
 (3) $x=\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$ (4) $x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

1

- (1) $x+2=3x-2$ 에서 $2x=4$ $\therefore x=2$
 (2) $-x+1=2x+7$ 에서 $3x=-6$ $\therefore x=-2$
 (3) $2x-3=2(x-1)$ 에서 $2x-3=2x-2$
 $\therefore 0\cdot x=1 \Rightarrow$ 해가 없다.
 (4) $1-x=-x+1$ 에서 $-x+x=1-1$
 $\therefore 0\cdot x=0 \Rightarrow$ 해가 무수히 많다.

2

- (1) $x^2-4x+3=0$ 을 인수분해하면
 $(x-1)(x-3)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=3$
 (2) $6x^2-5x+1=0$ 을 인수분해하면
 $(2x-1)(3x-1)=0$ $\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$
 (3) $x^2-3x-5=0$ 에서 근의 공식을 이용하면
 $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot (-5)}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$
 (4) $2x^2-4x+1=0$ 에서 근의 공식을 이용하면
 $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot 1}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

유 제

pp. 136~140

- 177 (1) (i) $a\neq 1$ 일 때, $x=-1$
 (ii) $a=1$ 일 때, 해가 무수히 많다.
 (2) (i) $a\neq b$, $a\neq -b$ 일 때, $x=\frac{1}{a+b}$
 (ii) $a=b$ 일 때, 해가 무수히 많다.
 (iii) $a=-b$ 일 때, 해가 없다.

178 3 179 -1 180 (1) $x=2$ (2) $x=2$ 또는 $x=\frac{10}{3}$

181 (1) $x=\frac{7}{2}$ (2) $x=-1$ 또는 $x=1$

182 $x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$

183 (1) $x=-1$ 또는 $x=3$ (2) $x=-1$ 또는 $x=6$

(3) $x=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$ (4) $x=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{3}$

184 (1) $x=\sqrt{2}-1$ 또는 $x=\sqrt{2}$ (2) $x=1$ 또는 $x=-2-i$

185 $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ 186 (1) $x=1-\sqrt{2}$ 또는 $x=1$ (2) $x=0$

187 (1) $x=\sqrt{7}$ (2) $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 188 -2

189 16cm^2 190 4m 191 2cm

177

(1) 주어진 방정식을 $Ax=B$ 의 꼴로 정리하면

$$ax-x=-a+1 \quad \therefore (a-1)x=-(a-1)$$

x 의 계수가 $a-1$ 이므로

(i) $a-1\neq 0$ (ii) $a-1=0$

인 경우로 나누어 풀면

(i) $a\neq 1$ 일 때, $x=\frac{-(a-1)}{a-1} \quad \therefore x=-1$

(ii) $a=1$ 일 때, $0\cdot x=0 \quad \therefore$ 해가 무수히 많다.

(2) 주어진 방정식을 $Ax=B$ 의 꼴로 정리하면

$$a^2x-b^2x=a-b \quad \therefore (a+b)(a-b)x=a-b$$

x 의 계수가 $(a+b)(a-b)$ 이므로

(i) $a\neq b$, $a\neq -b$ (ii) $a=b$ (iii) $a=-b$

인 경우로 나누어 풀면

(i) $a\neq b$, $a\neq -b$ 일 때

$$x=\frac{a-b}{(a+b)(a-b)} \quad \therefore x=\frac{1}{a+b}$$

(ii) $a=b$ 일 때, $0\cdot x=0 \quad \therefore$ 해가 무수히 많다.

(iii) $a=-b$ 일 때, $0\cdot x=-2b \quad \therefore$ 해가 없다.

178

주어진 집합이 공집합이므로 방정식 $a^2x-2=6x+(x+1)a$ 의 해가 없다.

주어진 방정식을 $Ax=B$ 의 꼴로 정리하면

$$(a^2-a-6)x=a+2$$

$$\therefore (a-3)(a+2)x=a+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 ①의 해가 없으려면 $0\cdot x=(0\text{이 아닌 실수})$ 의 꼴이어야 하므로

$$(a-3)(a+2)=0\text{이고}, a+2\neq 0$$

$$\Leftrightarrow (a=3 \text{ 또는 } a=-2)\text{이고}, a\neq -2 \Leftrightarrow a=3$$

TIP '해가 없다'와 '해가 무수히 많다.'의 집합 표현

(1) 해가 없다. $\Leftrightarrow$ 해집합이 $\emptyset$

(2) 해가 무수히 많다. $\Leftrightarrow$ 해집합이 실수 전체의 집합

$\Leftrightarrow$ 해집합이 무한집합

179

주어진 집합의 원소는 주어진 일차방정식의 해이고, 이 집합의 원소가 두 개 이상이라면 일차방정식의 해가 무수히 많아야 한다.

주어진 방정식을 $Ax=B$ 의 꼴로 정리하면

$$(a^2-2a-3)x=a+1$$

$$\therefore (a-3)(a+1)x=a+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 $\textcircled{1}$ 의 해가 무수히 많으려면 $0 \cdot x=0$ 의 꼴이어야 하므로

$$(a-3)(a+1)=0 \text{이고, } a+1=0$$

$$\Leftrightarrow (a=3 \text{ 또는 } a=-1) \text{이고, } a=-1 \Leftrightarrow a=-1$$

180

(1) 절댓값 기호 안의 식 $x-1$ 이 0이 되는 $x=1$ 을 기준으로 구간을 나누어 풀면

(i) $x < 1$ 일 때

$$-(x-1)+2x-5=0, \quad x-4=0 \quad \therefore x=4$$

$x=4$ 는 $x < 1$ 을 만족하지 않으므로 해가 아니다.

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$x-1+2x-5=0, \quad 3x-6=0 \quad \therefore x=2$$

$x=2$ 는 $x \geq 1$ 을 만족하므로 $x=2$ 는 해이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=2$

(2) 절댓값 기호 안의 식 $x+2$, $x-3$ 이 0이 되는 $x=-2$, $x=3$ 을 기준으로 구간을 나누어 풀면

(i) $x < -2$ 일 때

$$-(x+2)-2(x-3)=6, \quad -3x+4=6$$

$$\therefore x=-\frac{2}{3}$$

$x=-\frac{2}{3}$ 는 $x < -2$ 를 만족하지 않으므로 해가 아니다.

(ii) $-2 \leq x < 3$ 일 때

$$x+2-2(x-3)=6, \quad -x+8=6 \quad \therefore x=2$$

$x=2$ 는 $-2 \leq x < 3$ 을 만족하므로 해이다.

(iii) $x \geq 3$ 일 때

$$x+2+2(x-3)=6, \quad 3x-4=6 \quad \therefore x=\frac{10}{3}$$

$x=\frac{10}{3}$ 은 $x \geq 3$ 을 만족하므로 해이다.

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x=2 \text{ 또는 } x=\frac{10}{3}$$

181

(1) 절댓값 기호 안의 식 $x-2$, $5-x$ 가 0이 되는 $x=2$, $x=5$ 를 기준으로 구간을 나누어 풀면

(i) $x < 2$ 일 때

$$-(x-2)=5-x, \quad -x+2=5-x$$

$2=5$ 라는 모순이 생기므로 해가 없다.

(ii) $2 \leq x < 5$ 일 때

$$x-2=5-x, \quad 2x=7 \quad \therefore x=\frac{7}{2}$$

$x=\frac{7}{2}$ 은 $2 \leq x < 5$ 를 만족하므로 해이다.

(iii) $x \geq 5$ 일 때

$$x-2=-(5-x), \quad x-2=x-5$$

$-2=-5$ 라는 모순이 생기므로 해가 없다.

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=\frac{7}{2}$

(2) $\sqrt{x^2+4x+4}=|2x+1|$ 에서

$$\sqrt{(x+2)^2}=|2x+1| \quad \therefore |x+2|=|2x+1|$$

절댓값 기호 안의 식 $x+2$, $2x+1$ 이 0이 되는

$x=-2$, $x=-\frac{1}{2}$ 을 기준으로 구간을 나누어 풀면

(i) $x < -2$ 일 때

$$-(x+2)=-(2x+1) \quad \therefore x=1$$

$x=1$ 은 $x < -2$ 를 만족하지 않으므로 해가 아니다.

(ii) $-2 \leq x < -\frac{1}{2}$ 일 때

$$x+2=-(2x+1) \quad \therefore x=-1$$

$x=-1$ 은 $-2 \leq x < -\frac{1}{2}$ 을 만족하므로 해이다.

(iii) $x \geq -\frac{1}{2}$ 일 때

$$x+2=2x+1 \quad \therefore x=1$$

$x=1$ 은 $x \geq -\frac{1}{2}$ 을 만족하므로 해이다.

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

182

$1 < x < 3$ 을 정수 단위로 구간을 나누어 풀면

(i) $1 < x < 2$ 일 때, $[x]=1$

$$1=2x-2 \quad \therefore x=\frac{3}{2}$$

$x=\frac{3}{2}$ 은 $1 < x < 2$ 를 만족하므로 해이다.

(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $[x]=2$

$$2=2x-2 \quad \therefore x=2$$

$x=2$ 는 $2 \leq x < 3$ 을 만족하므로 해이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$

183

- (1) 양변에 6을 곱하면
- $3(x^2-1)+6=2(2x^2-x)$

$$x^2-2x-3=0, (x-3)(x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

- (2) 양변에 10을 곱하면
- $x^2-5x=6$

$$x^2-5x-6=0, (x-6)(x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=6$$

- (3) 좌변이 인수분해가 되지 않으므로 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

- (4) 좌변이 인수분해가 되지 않으므로 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 3 \cdot 2}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{3}$$

184

- (1)
- x^2
- 의 계수를 유리화하기 위해 양변에
- $\sqrt{2}-1$
- 을 곱하면

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2 - (3+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)x + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 0$$

$$x^2 + (1-2\sqrt{2})x + (2-\sqrt{2}) = 0$$

좌변을 인수분해하면

$$\{x - (\sqrt{2}-1)\}(x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore x = \sqrt{2}-1 \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

- (2)
- x^2
- 의 계수를 실수화하기 위해 양변에
- $1-2i$
- 를 곱하면

$$(1+2i)(1-2i)x^2 - (1-3i)(1-2i)x - 5i(1-2i) = 0$$

$$5x^2 + 5(1+i)x - 5(2+i) = 0$$

$$x^2 + (1+i)x - (2+i) = 0$$

좌변을 인수분해하면

$$(x-1)\{x - (-2-i)\} = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = -2-i$$

185

이차방정식 $x^2+2ax-4a^2=0$ 의 한 근이 1이므로 $x=1$ 을 주어진 방정식에 대입하면

$$1+2a-4a^2=0, 4a^2-2a-1=0$$

좌변이 인수분해가 되지 않으므로 근의 공식을 이용하면

$$a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1)}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

186

- (1) 절댓값 기호 안의 식
- $2x-1$
- 이 0이 되는
- $x = \frac{1}{2}$
- 을 기준으로 구간을 나누어 풀면

- (i)
- $x < \frac{1}{2}$
- 일 때

$$x^2 - (2x-1) = 2, x^2 - 2x - 1 = 0$$

좌변이 인수분해가 되지 않으므로 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot (-1)}}{1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

 $x = 1 - \sqrt{2}$ 는 $x < \frac{1}{2}$ 을 만족하므로 해이다.

- (ii)
- $x \geq \frac{1}{2}$
- 일 때

$$x^2 + (2x-1) = 2, x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x-1)(x+3) = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

 $x = 1$ 은 $x \geq \frac{1}{2}$ 을 만족하므로 해이다.

- (i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = 1 - \sqrt{2} \text{ 또는 } x = 1$$

- (2) 절댓값 기호 안의 식
- $x, x-1$
- 이 0이 되는
- $x=0, x=1$
- 을 기준으로 구간을 나누어 풀면

- (i)
- $x < 0$
- 일 때

$$2x^2 - x - (x-1) = 1, x(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

 $x=0, x=1$ 은 $x < 0$ 을 만족하지 않으므로 해가 아니다.

- (ii)
- $0 \leq x < 1$
- 일 때

$$2x^2 + x - (x-1) = 1, 2x^2 = 0 \quad \therefore x = 0$$

 $x=0$ 은 $0 \leq x < 1$ 을 만족하므로 해이다.

- (iii)
- $x \geq 1$
- 일 때

$$2x^2 + x + (x-1) = 1, x^2 + x - 1 = 0$$

좌변이 인수분해가 되지 않으므로 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 는 $x \geq 1$ 을 만족하지 않으므로 해가 아니다.

- (i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 해는
- $x = 0$

187

- (1)
- $2 < x < 4$
- 를 정수 단위로 구간을 나누어 풀면

- (i)
- $2 < x < 3$
- 일 때,
- $[x]=2$

$$x^2 - 2 - 5 = 0, x^2 = 7 \quad \therefore x = \pm\sqrt{7}$$

 $x = \sqrt{7}$ 은 $2 < x < 3$ 을 만족하므로 해이다.

- (ii)
- $3 \leq x < 4$
- 일 때,
- $[x]=3$

$$x^2 - 3 - 5 = 0, x^2 = 8 \quad \therefore x = \pm 2\sqrt{2}$$

 $x = \pm 2\sqrt{2}$ 는 $3 \leq x < 4$ 를 만족하지 않으므로 해가 아니다.

- (i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는
- $x = \sqrt{7}$

(2) $1 < x < 2$ 를 가우스 기호 안의 x^2 이 정수가 되는 단위로 구간을 나누어 풀면

(i) $1 < x < \sqrt{2}$ 일 때, $[x^2]=1$

$$x^2 - x = 1 - 1, x(x-1) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

$x=0, x=1$ 은 $1 < x < \sqrt{2}$ 를 만족하지 않으므로 해가 아니다.

(ii) $\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}$ 일 때, $[x^2]=2$

$$x^2 - x = 2 - 1, x^2 - x - 1 = 0$$

좌변이 인수분해가 되지 않으므로 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{는 } \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \text{을 만족하므로 해이다.}$$

(iii) $\sqrt{3} \leq x < 2$ 일 때, $[x^2]=3$

$$x^2 - x = 3 - 1, (x-2)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

$x = -1, x = 2$ 는 $\sqrt{3} \leq x < 2$ 를 만족하지 않으므로 해가 아니다.

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

188

주어진 방정식의 좌변을 인수분해 하면

$$([x]+3)([x]-1) = 0 \quad \therefore [x] = -3 \text{ 또는 } [x] = 1$$

(i) $[x] = -3$ 일 때, $-3 \leq x < -2$

(ii) $[x] = 1$ 일 때, $1 \leq x < 2$

(i), (ii)에서 해집합 S는

$$S = \{x \mid -3 \leq x < -2\} \cup \{x \mid 1 \leq x < 2\}$$

주어진 해집합 $S = \{x \mid a \leq x < b\} \cup \{x \mid c \leq x < d\}$ 와 비교하면

$$a = -3, b = -2, c = 1, d = 2$$

$$\therefore a + b + c + d = (-3) + (-2) + 1 + 2 = -2$$

189

정사각형의 한 변의 길이가 x cm
이므로 가로로 4 cm, 세로로 2 cm
늘인 직사각형의 가로와 세로의 길
이는

$$(\text{가로의 길이}) = (x+4) \text{ cm}$$

$$(\text{세로의 길이}) = (x+2) \text{ cm}$$

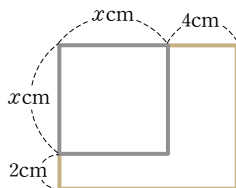
이 직사각형의 넓이는

$$(x+4)(x+2) \text{ cm}^2$$

이것은 원래 넓이의 3배이므로

$$(x+4)(x+2) = 3x^2, 2x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$(x+1)(x-4) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$



그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 4 \quad \therefore x^2 = 16$

따라서 원래 정사각형의 넓이는 16 cm^2 이다.

190

전체 땅의 넓이가 $20 \times 20 = 400 (\text{m}^2)$, 도로를 제외한 땅의
넓이가 256 m^2 이므로 도로의 넓이는

$$400 - 256 = 144 (\text{m}^2)$$

오른쪽 그림과 같이 도로의 폭이

x m이므로 도로의 넓이는

$$20x + 20x - x^2 = 144$$

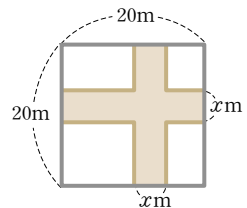
$$x^2 - 40x + 144 = 0$$

$$(x-4)(x-36) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = 36$$

그런데 $x < 20$ 이므로 $x = 4$

따라서 구하는 도로의 폭은 4 m이다.



191

직사각형의 둘레의 길이가 28 cm이므로 가로의 길이를 x cm
라 하면 세로의 길이는 $(14-x)$ cm이다.

오른쪽 그림과 같이 대각선의

길이가 10 cm이므로 피타고

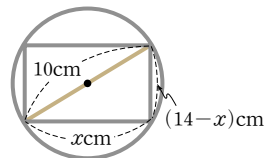
라스의 정리에 의해

$$x^2 + (14-x)^2 = 10^2$$

$$x^2 - 14x + 48 = 0$$

$$(x-6)(x-8) = 0 \quad \therefore x = 6 \text{ 또는 } x = 8$$

따라서 가로와 세로의 길이의 차는 $|8-6| = 2 (\text{cm})$ 이다.



소단원 연습문제

p. 141

001 -3

002 ④

003 ⑤

004 1

$$005 \quad x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

001

주어진 등식을 $Ax=B$ 의 꼴로 정리하면

$$(a^2 + 3a - 10)x = a - 2 \quad \therefore (a-2)(a+5)x = a-2$$

x 의 계수가 $(a-2)(a+5)$ 이므로

$$(i) \ a-2 \neq 0, a+5 \neq 0 \quad (ii) \ a-2 = 0 \quad (iii) \ a+5 = 0$$

인 경우로 나누어 풀면

$$(i) \ a \neq 2, a \neq -5 \text{일 때, } x = \frac{a-2}{(a-2)(a+5)} \quad \therefore x = \frac{1}{a+5}$$

$$(ii) \ a = 2 \text{일 때, } 0 \cdot x = 0 \quad \therefore \text{해가 무수히 많다.}$$

$$(iii) \ a = -5 \text{일 때, } 0 \cdot x = -7 \quad \therefore \text{해가 없다.}$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } a = 2, b = -5$$

$$\therefore a + b = 2 + (-5) = -3$$

002

이차방정식 $kx^2 - kx - 6 = 0$... ㉠의 한 근이 -2 이므로 $x = -2$ 를 ㉠에 대입하면

$$4k + 2k - 6 = 0, \quad 6k - 6 = 0 \quad \therefore k = 1$$

$k = 1$ 을 ㉠에 대입하면 $x^2 - x - 6 = 0$

$$(x+2)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 $m = 3$ 이므로 $k + m = 1 + 3 = 4$

003

① $x^2 - 3x - 4 = 0$ 의 좌변을 인수분해하면

$$(x+1)(x-4) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

② $x^2 + 2x + 3 = 0$ 에서 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot 3}}{1} = -1 \pm \sqrt{2}i$$

③ $x^2 + |x| - 2 = 0$ 에서 절댓값 기호 안의 식 x 에 대하여 $x = 0$ 을 기준으로 구간을 나누어 풀면

(i) $x \geq 0$ 일 때, $x^2 + x - 2 = 0$

$$(x+2)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

$x = 1$ 은 $x \geq 0$ 을 만족하므로 해이다.

(ii) $x < 0$ 일 때, $x^2 - x - 2 = 0$

$$(x+1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

$x = -1$ 은 $x < 0$ 을 만족하므로 해이다.

(i), (ii)에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

④ $x + 1 = |x - 3|$ 에서 절댓값 기호 안의 식 $x - 3$ 이 0이 되는 $x = 3$ 을 기준으로 구간을 나누어 풀면

(i) $x \geq 3$ 일 때, $x + 1 = x - 3$

$1 = -3$ 이라는 모순이 생기므로 해가 없다.

(ii) $x < 3$ 일 때, $x + 1 = -(x - 3)$

$$2x = 2 \quad \therefore x = 1$$

$x = 1$ 은 $x < 3$ 을 만족하므로 해이다.

(i), (ii)에서 $x = 1$

⑤ $2 \leq x < 4$ 를 정수 단위로 구간을 나누어 풀면

(i) $2 \leq x < 3$ 일 때, $[x] = 2$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot (-2)}}{1} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$x = 1 + \sqrt{3}$ 은 $2 \leq x < 3$ 을 만족하므로 해이다.

(ii) $3 \leq x < 4$ 일 때, $[x] = 3$

$$x^2 - 2x - 3 = 0, \quad (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

$x = 3$ 은 $3 \leq x < 4$ 를 만족하므로 해이다.

(i), (ii)에서 $x = 1 + \sqrt{3}$ 또는 $x = 3$

004

정사각형의 넓이가 25이므로 오른쪽 그림에서 1, m, n의 넓이의 합이 6이면 전체 땅의 넓이가 31이 된다.

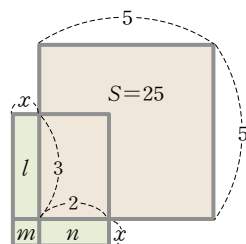
$$\therefore 1 + m + n = 6$$

$$3x + x^2 + 2x = 6$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$(x+6)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -6 \text{ 또는 } x = 1$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 1$



005

(i) $x > 1$ 일 때, 가로

의 길이가 1, 세로의 길

이가 x 인 직사각형

①과 그 직사각형에

서 한 변의 길이가 1

인 정사각형을 잘라

낸 직사각형 ②는 오

른쪽 그림과 같다.

직사각형 ①의 가로, 세로의 비율과 직사각형 ②의 세로, 가로의 비율이 같으므로

$$1 : x = (x-1) : 1, \quad x(x-1) = 1, \quad x^2 - x - 1 = 0$$

근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(ii) $x < 1$ 일 때, 가로

의 길이가 1, 세로의 길

이가 x 인 직사각

형 ③과 그 직사각형

에 한 변의 길이가 x

인 정사각형을 잘라

낸 직사각형 ④는 오

른쪽 그림과 같다.

직사각형 ③의 가로, 세로의 비율과 직사각형 ④의 세로, 가로의 비율이 같으므로

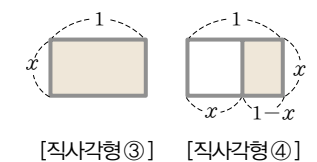
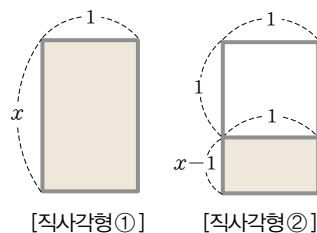
$$1 : x = x : (1-x), \quad x^2 = 1 - x, \quad x^2 + x - 1 = 0$$

근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

(i), (ii)에서 $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 또는 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$



02 이차방정식의 판별식

개념 확인 문제

p. 142

- 1 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 서로 같은 두 실근(중근)
(3) 서로 다른 두 허근

1

- (1) $x^2+2x-1=0$ 에서 판별식 D 를 구하면

$$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-1)=2>0 \Rightarrow \text{서로 다른 두 실근}$$

- (2) $x^2-6x+9=0$ 에서 판별식 D 를 구하면

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot9=0 \Rightarrow \text{서로 같은 두 실근}$$

- (3) $x^2+3x+4=0$ 에서 판별식 D 를 구하면

$$D=3^2-4\cdot1\cdot4=-7<0 \Rightarrow \text{서로 다른 두 허근}$$

유 제

pp. 143~144

192 (1) $k>-2$ (2) $k=-2$ (3) $k<-2$

193 8개 194 -2 195 -3 196 -1

192

주어진 방정식의 판별식 D 를 구하면

$$\frac{D}{4}=k^2-(k+1)(k-2)=k+2$$

- (1) 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건은

$$D>0 \Rightarrow \frac{D}{4}=k+2>0 \quad \therefore k>-2$$

- (2) 주어진 방정식이 중근을 가질 조건은

$$D=0 \Rightarrow \frac{D}{4}=k+2=0 \quad \therefore k=-2$$

- (3) 주어진 방정식이 서로 다른 두 허근을 가질 조건은

$$D<0 \Rightarrow \frac{D}{4}=k+2<0 \quad \therefore k<-2$$

193

$x^2-5x-k=0$ 이 실근을 갖기 위한 조건은

$$D\geq 0 \Rightarrow D=(-5)^2-4\cdot(-k)\geq 0$$

$$25+4k\geq 0 \quad \therefore k\geq -\frac{25}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$2x^2-6x+3k=0$ 이 실근을 갖기 위한 조건은

$$D\geq 0 \Rightarrow \frac{D}{4}=(-3)^2-2\cdot3k\geq 0$$

$$9-6k\geq 0 \quad \therefore k\leq \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족하는 k 의 값의 범위는

$$-\frac{25}{4}\leq k\leq \frac{3}{2}$$

따라서 정수 k 의 값은 $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$
이므로 모두 8개이다.

194

주어진 이차방정식이 중근을 가질 조건은

$$D=0 \Rightarrow D=(2a+2+m)^2-4(a^2+4a-n)=0$$

$$4a^2+4+m^2+8a+4m+4am-4a^2-16a+4n=0$$

이 식을 a 에 대하여 정리하면

$$(4m-8)a+(2+m)^2+4n=0$$

이 식은 a 에 대한 항등식이므로

$$4m-8=0, (2+m)^2+4n=0$$

$$\therefore m=2, n=-4 \quad \therefore m+n=-2$$

195

계수가 허수인 이차방정식이 실근을 가지므로 실수 부분과 허수 부분을 나누어 정리하면

$$(x^2-2ax+5)+(x^2-2x-3)i=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 실근을 가지므로

$$x \text{는 실수} \Rightarrow x^2-2ax+5, x^2-2x-3 \text{도 실수}$$

$\textcircled{1}$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의해

$$x^2-2x-3=0, x^2-2ax+5=0$$

$x^2-2x-3=0$ 에서

$$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

이를 $x^2-2ax+5=0$ 에 대입하면

$$(i) x=-1 \text{ 일 때, } 1+2a+5=0 \quad \therefore a=-3$$

$$(ii) x=3 \text{ 일 때, } 9-6a+5=0 \quad \therefore a=\frac{7}{3}$$

그런데 a 는 정수이므로 $a=-3$

196

이차방정식의 두 근이 서로 같다는 것은 중근을 가짐을 의미한다.

계수가 허수인 이차방정식이 중근을 가질 조건은

$$D=0 \Rightarrow D=(p+4i)^2-4(q+4i)=0$$

$$p^2+8pi-16-4q-16i=0$$

이 식의 실수 부분과 허수 부분을 나누어 정리하면

$$(p^2-4q-16)+8(p-2)i=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

p, q 가 실수이므로 $\textcircled{1}$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의해

$$p^2-4q-16=0, p-2=0$$

$$\therefore p^2-4q-16=0, p=2$$

$$p=2 \text{를 } p^2-4q-16=0 \text{에 대입하면 } q=-3$$

$$\therefore p+q=2+(-3)=-1$$

03 이차방정식의 근의 성질

개념 확인 문제

p. 146

1 (1) (두 근의 합) = -3, (두 근의 곱) = 6

(2) (두 근의 합) = 2, (두 근의 곱) = $\frac{5}{2}$

2 (1) $1-\sqrt{2}$ (2) $2+i$

3 (1) $x^2-5x+6=0$ (2) $x^2+6x-7=0$

(3) $x^2-4x-1=0$ (4) $x^2-14x+74=0$

1

(1) $x^2+3x+6=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$$(\text{두 근의 합}) = -\frac{3}{1} = -3, (\text{두 근의 곱}) = \frac{6}{1} = 6$$

(2) $2x^2-4x+5=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$$(\text{두 근의 합}) = -\frac{-4}{2} = 2, (\text{두 근의 곱}) = \frac{5}{2}$$

3

(1) (두 근의 합) = $2+3=5$

(두 근의 곱) = $2 \cdot 3 = 6$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-5x+6=0$

(2) (두 근의 합) = $1+(-7)=-6$

(두 근의 곱) = $1 \cdot (-7) = -7$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2+6x-7=0$

(3) (두 근의 합) = $(2-\sqrt{5}) + (2+\sqrt{5}) = 4$

(두 근의 곱) = $(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5}) = -1$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-4x-1=0$

(4) (두 근의 합) = $(7+5i) + (7-5i) = 14$

(두 근의 곱) = $(7+5i)(7-5i) = 74$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-14x+74=0$

유 제

pp. 147~150

197 (1) 6 (2) 2 (3) 6 198 $\frac{5\sqrt{13}}{3}$ 199 $\frac{1}{9}$ 200 8

201 1 202 8 203 ② 204 8 205 3

206 (1) $-2 < m \leq -1$ (2) $m < -2$ 207 4 208 $a < -2$

197

근과 계수의 관계에 의해 두 근 α, β 의 합과 곱은

$$\alpha + \beta = -\frac{-6}{3} = 2, \alpha\beta = \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(1) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{2}{\frac{1}{3}} (\because \textcircled{1}) = 6$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{\beta}{\beta-1} &= \frac{\alpha\beta - \alpha + \alpha\beta - \beta}{(\alpha-1)(\beta-1)} \\ &= \frac{2\alpha\beta - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{3} - 2}{\frac{1}{3} - 2 + 1} (\because \textcircled{1}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 2^3 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 (\because \textcircled{1}) \\ &= 6 \end{aligned}$$

198

두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 3$$

이때 $\alpha - \beta$ 의 값을 구하면

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 5^2 - 4 \cdot 3 = 13$$

$$\therefore \alpha - \beta = \sqrt{13} (\because \alpha > \beta)$$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}{\alpha\beta} = \frac{5\sqrt{13}}{3}$$

199

이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 이므로 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합과 곱은

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -2, \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = 3$$

이때 $\alpha\beta = \frac{1}{3}$ 이므로 이를 $\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -2$ 에 대입하면

$$\alpha + \beta = -\frac{2}{3}$$

또, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근은 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합과 곱은

$$\alpha + \beta + \alpha\beta = \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} = -a \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

$$(\alpha + \beta)\alpha\beta = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{9} = b \quad \therefore b = -\frac{2}{9}$$

$$\therefore a + b = \frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{1}{9}$$

200

한 근이 다른 근의 2배이므로 두 근을 $\alpha, 2\alpha$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합과 곱은

$$\alpha + 2\alpha = 6 \quad \dots \textcircled{1}, \quad \alpha \cdot 2\alpha = k \quad \dots \textcircled{2}$$

①에서 $3\alpha = 6 \quad \therefore \alpha = 2$

$\alpha = 2$ 를 ②에 대입하면 $2 \cdot 4 = k \quad \therefore k = 8$

201

두 근이 연속한 짝수이므로 두 근을 $\alpha, \alpha+2$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합과 곱은

$$\alpha + \alpha + 2 = 2k \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha(\alpha+2) = k^2 + 2k - 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠에서

$$2(\alpha+1) = 2k \quad \therefore \alpha = k-1 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$(k-1)(k+1) = k^2 + 2k - 3, \quad k^2 - 1 = k^2 + 2k - 3$$

$$2k = 2 \quad \therefore k = 1$$

202

두 근의 비가 2 : 3이므로 두 근을 $2\alpha, 3\alpha$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합과 곱은

$$2\alpha + 3\alpha = m + 2 \quad \therefore 5\alpha = m + 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$2\alpha \cdot 3\alpha = 3m \quad \therefore 6\alpha^2 = 3m \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠에서

$$\alpha = \frac{m+2}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$6\left(\frac{m+2}{5}\right)^2 = 3m, \quad 2m^2 - 17m + 8 = 0$$

$$(2m-1)(m-8) = 0 \quad \therefore m = \frac{1}{2} \text{ 또는 } m = 8$$

그런데 m 은 자연수이므로 $m = 8$

203

근과 계수의 관계에 의해 두 근 α, β 의 합과 곱은

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

구하는 이차방정식의 두 근 $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ 의 합과 곱은

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{2^2 - 2 \cdot 5}{5} (\because \textcircled{㉠}) \\ &= -\frac{6}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ 를 두 근으로 하고, 이차항의 계수가 1인 x 에 대한 이차방정식은

$$x^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)x + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{6}{5}x + 1 = 0 (\because \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢})$$

$$\therefore 5x^2 + 6x + 5 = 0$$

204

근과 계수의 관계에 의해 두 근 α, β 의 합과 곱은

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

구하는 이차방정식의 두 근 α^2+1, β^2+1 의 합과 곱은

$$\begin{aligned} \alpha^2 + 1 + \beta^2 + 1 &= \alpha^2 + \beta^2 + 2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 2 \\ &= 2^2 - 2 \times 3 + 2 (\because \textcircled{㉠}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) &= (\alpha\beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1 \\ &= (\alpha\beta)^2 + (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 1 \\ &= 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 + 1 (\because \textcircled{㉠}) = 8 \end{aligned}$$

따라서 구하는 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2 - (\alpha^2 + 1 + \beta^2 + 1)x + (\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + ax + b = 0 \Leftrightarrow x^2 + 8 = 0$$

$$\therefore a = 0, \quad b = 8 \quad \therefore a + b = 8$$

205

주어진 이차방정식의 계수가 모두 실수이므로 한 근이 $2 + \sqrt{3}i$

이면 다른 한 근은 $2 + \sqrt{3}i$ 의 켤레복소수인 $2 - \sqrt{3}i$ 이다.

근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합은 $-a$ 이므로

$$(\text{두 근의 합}) = (2 + \sqrt{3}i) + (2 - \sqrt{3}i) = 4 \quad \therefore a = -4$$

또한, 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 곱은 b 이므로

$$(\text{두 근의 곱}) = (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i) = 7 \quad \therefore b = 7$$

$$\therefore a + b = (-4) + 7 = 3$$

206

(1) 두 근이 모두 음수일 조건은

$$(i) D \geq 0 \quad (ii) (\text{두 근의 합}) < 0 \quad (iii) (\text{두 근의 곱}) > 0$$

$$(i) \frac{D}{4} = 1^2 - (m+2) \geq 0 \quad \therefore m \leq -1$$

$$(ii) (\text{두 근의 합}) = -2 < 0 \quad \therefore m \text{은 모든 실수}$$

$$(iii) (\text{두 근의 곱}) = m+2 > 0 \quad \therefore m > -2$$

$$(i), (ii), (iii) \text{을 동시에 만족하는 } m \text{의 값의 범위는} \\ -2 < m \leq -1$$

(2) 두 근이 서로 다른 부호일 조건은

$$(\text{두 근의 곱}) < 0 \Rightarrow m+2 < 0 \quad \therefore m < -2$$

207

이차방정식의 두 근의 절댓값은 같고, 부호가 다를 조건은

$$(i) (\text{두 근의 합}) = 0 \quad (ii) (\text{두 근의 곱}) < 0$$

$$(i) (\text{두 근의 합}) = -(a^2 - a - 12) = 0$$

$$(a-4)(a+3) = 0 \quad \therefore a = 4 \text{ 또는 } a = -3$$

$$(ii) (\text{두 근의 곱}) = -a+3 < 0 \quad \therefore a > 3$$

$$(i), (ii) \text{를 동시에 만족하는 } a \text{의 값은} \quad a = 4$$

서로 다른 부호의 두 근에서 음근의 절댓값이 양근의 절댓값보다 클 조건은

- (i) (두 근의 합) < 0 (ii) (두 근의 곱) < 0
 (i) (두 근의 합) $= 2a < 0 \quad \therefore a < 0$
 (ii) (두 근의 곱) $= a + 2 < 0 \quad \therefore a < -2$
 (i), (ii)를 동시에 만족하는 a 의 값의 범위는 $a < -2$

소단원 연습문제

pp. 151~153

001 ②	002 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ	003 $k > \frac{9}{8}$
004 (1) $\frac{40}{37}$ (2) 180	005 $\frac{3}{2}$	006 $\frac{4}{3}$ 또는 4
007 ①	008 -2	009 ④
010 1	011 -2	
012 ①	013 6	

001

각 이차방정식의 판별식 D 를 구하면

$$\text{ㄱ. } D = 3^2 - 4 \cdot 1 = 5 > 0$$

→ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$$\text{ㄴ. } \frac{D}{4} = (-2)^2 - 2 \cdot 3 = -2 < 0$$

→ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$$\text{ㄷ. } \frac{D}{4} = (\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 4 = -1 < 0$$

→ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$$\text{ㄹ. } x^2 - 8x + 16 = 0 \text{에서 } \frac{D}{4} = (-4)^2 - 1 \cdot 16 = 0$$

→ 서로 같은 두 실근(중근)을 갖는다.

따라서 보기 중 실근을 갖는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

002

$$\text{ㄱ. 이차방정식 } x^2 - 2 = 0 \text{의 근을 구하면 } x = \pm \sqrt{2}$$

$$\therefore x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

$$\text{ㄴ. 이차방정식 } 4x^2 + 4x + 1 = 0 \text{의 근을 구하면 } x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

$$\text{ㄷ. 이차방정식 } x^2 + 4 = 0 \text{의 근을 구하면 } x = \pm 2i$$

$$\therefore x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i)$$

$$\text{ㄹ. 이차방정식 } 3x^2 - 2x + 1 = 0 \text{의 근을 구하면}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{2}i}{3}$$

$$\therefore 3x^2 - 2x + 1 = 3\left(x - \frac{1 + \sqrt{2}i}{3}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{2}i}{3}\right)$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

003

이차방정식이 허근을 가질 조건은 판별식 $D < 0$ 이므로

$$(i) x^2 - 3x + 2k = 0 \text{에서 판별식 } D \text{를 구하면}$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2k < 0, 9 - 8k < 0 \quad \therefore k > \frac{9}{8}$$

$$(ii) x^2 + 4x + 16k = 0 \text{에서 판별식 } D \text{를 구하면}$$

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 1 \cdot 16k < 0, 4 - 16k < 0 \quad \therefore k > \frac{1}{4}$$

$$(i), (ii) \text{를 동시에 만족하는 } k \text{의 값의 범위는 } k > \frac{9}{8}$$

004

근과 계수의 관계에 의해 두 근 α, β 의 합과 곱은

$$\alpha + \beta = \frac{6}{2} = 3, \alpha\beta = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 8 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\alpha^2 + 1} + \frac{1}{\beta^2 + 1} &= \frac{\alpha^2 + 1 + \beta^2 + 1}{(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2}{(\alpha\beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1} \\ &= \frac{8 + 2}{\frac{1}{4} + 8 + 1} (\because \text{㉠, ㉡}) = \frac{40}{37} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 3^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 (\because \text{㉠}) \\ &= \frac{45}{2} \quad \dots\dots \text{㉢} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3\beta^3} = \frac{\frac{45}{2}}{\frac{1}{8}} (\because \text{㉠, ㉢}) = 180$$

005

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 $x = 1$ 또는 $x = 2$ 이므로

근과 계수의 관계에 의해

$$(\text{두 근의 합}) = -\frac{b}{a} = 1 + 2 = 3 \quad \therefore b = -3a$$

$$(\text{두 근의 곱}) = \frac{c}{a} = 1 \times 2 = 2 \quad \therefore c = 2a$$

따라서 이차방정식 $cx^2 + bx + a = 0$ 의 두 근의 합은 근과 계

$$\text{수의 관계에 의해 } -\frac{b}{c} = -\frac{-3a}{2a} = \frac{3}{2}$$

006

한 근이 다른 근의 3배이므로 두 근을 $\alpha, 3\alpha$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합은 $-k$ 이므로

$$\alpha + 3\alpha = -k \quad \therefore \alpha = -\frac{k}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 곱은 $k-1$ 이므로

$$\alpha \cdot 3\alpha = k-1 \quad \therefore 3\alpha^2 = k-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } 3\left(-\frac{k}{4}\right)^2 = k-1, \quad 3k^2 - 16k + 16 = 0$$

$$(3k-4)(k-4) = 0 \quad \therefore k = \frac{4}{3} \text{ 또는 } k = 4$$

007

주어진 이차방정식의 계수가 모두 유리수이므로 한 근이

$$\sqrt{6-\sqrt{32}} = \sqrt{6-2\sqrt{8}} = 2-\sqrt{2}$$

이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{2}$ 이다.

이때 근과 계수의 관계에서 두 근의 합은 $-a$ 이므로

$$(\text{두 근의 합}) = (2+\sqrt{2}) + (2-\sqrt{2}) = 4 \quad \therefore a = -4$$

또한, 근과 계수의 관계에서 두 근의 곱은 b 이므로

$$(\text{두 근의 곱}) = (2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) = 2 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a+b = (-4) + 2 = -2$$

008

계수가 허수인 이차방정식이 중근을 가질 조건은

$$D=0 \Rightarrow D = (a-2i)^2 - 4(b+2i) = 0$$

$$a^2 - 4ai - 4 - 4b - 8i = 0$$

이 식을 실수 부분과 허수 부분으로 나누어 정리하면

$$(a^2 - 4b - 4) + (-4a - 8)i = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

a, b 가 실수이므로 $\textcircled{1}$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의해

$$a^2 - 4b - 4 = 0, \quad -4a - 8 = 0$$

$$\therefore a^2 - 4b - 4 = 0, \quad a = -2$$

$$a = -2 \text{를 } a^2 - 4b - 4 = 0 \text{에 대입하면 } b = 0$$

$$\therefore a+b = -2$$

009

주어진 방정식을 x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$(a-c)x^2 + 2bx + a+c = 0$$

이차방정식이 중근을 가지기 위한 조건은

$$D=0 \Rightarrow \frac{D}{4} = b^2 - (a-c)(a+c) = 0$$

$$b^2 - a^2 + c^2 = 0 \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 주어진 삼각형은 a 가 빗변인 직각삼각형이다.

010

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 에서 명수는 a 는 잘못 보았지만 b 는 제대로 보았으므로 이차항의 계수와 상수항의 관계는 제대로 보고 풀었다.

이때 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 곱은 b 이므로

$$(\text{두 근의 곱}) = (-2+i)(-2-i) = 5 \quad \therefore b = 5$$

또한, 하하는 b 는 잘못 보았지만 a 는 제대로 보았으므로 이차항의 계수와 일차항의 계수는 제대로 보고 풀었다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-a$ 이므로

$$(\text{두 근의 합}) = -1+5 \quad \therefore a = -4$$

$$\therefore a+b = (-4) + 5 = 1$$

011

주어진 방정식을 x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$3x^2 + (m^2 - 3m - 10)x + 3m - 15 = 0$$

두 근의 절댓값이 같고 부호가 다를 조건은

$$(i) (\text{두 근의 합}) = 0 \quad (ii) (\text{두 근의 곱}) < 0$$

$$(i) (\text{두 근의 합}) = \frac{-(m^2 - 3m - 10)}{3} = 0$$

$$m^2 - 3m - 10 = 0, \quad (m-5)(m+2) = 0$$

$$\therefore m = 5 \text{ 또는 } m = -2$$

$$(ii) (\text{두 근의 곱}) = \frac{3m-15}{3} < 0 \quad \therefore m < 5$$

$$(i), (ii) \text{에서 } m = -2$$

012

$x^2-ax+2a-1=0$ 이 한 허근 ω 를 가지므로

$$\omega^2 - a\omega + 2a - 1 = 0 \quad \therefore \omega^2 = a\omega - 2a + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \omega^3 = \omega \cdot \omega^2 = \omega(a\omega - 2a + 1) (\because \textcircled{1})$$

$$= a\omega^2 - 2a\omega + \omega$$

$$= a(a\omega - 2a + 1) - 2a\omega + \omega (\because \textcircled{1})$$

$$= (a^2 - 2a + 1)\omega - a(2a - 1)$$

그런데 ω^3 이 실수이므로 $a^2 - 2a + 1 = 0$

$$\therefore (a-1)^2 = 0 \quad \therefore a = 1$$

013

$A \cap B = \{2\}$ 에서 $x=2$ 는 두 방정식 $f(x)+g(x)=0$ 과

$f(x)g(x)=0$ 을 모두 만족하므로

$$f(2)+g(2)=0, \quad f(2)g(2)=0$$

$$\therefore f(2)=0, \quad g(2)=0$$

여기서 $f(x)=(x-2)(x-a)$, $g(x)=(x-2)(x-b)$ 라 하면

$$f(x)g(x)=(x-2)^2(x-a)(x-b)$$

$A \cap B = \{2\}$, $B-A = \{3, 5\}$ 에서 $B-A = B - (A \cap B)$ 이므로

$$B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow a=3, b=5 \text{ 또는 } a=5, b=3$$

$$\therefore f(x)+g(x) = (x-2)(x-3) + (x-2)(x-5)$$

$$= (x-2)(2x-8) = 2(x-2)(x-4)$$

즉, 방정식 $f(x)+g(x)=0$ 은 $2(x-2)(x-4)=0$ 과 같고

두 근은 $x=2$ 또는 $x=4$ 이다.

따라서 두 근의 합은 $2+4=6$

04 고차방정식

유 제

pp. 155~156

209 (1) $x = -3$ 또는 $x = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

(2) $x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

(3) $x = 1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 5$

(4) $x = -2$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{2}i$

210 (1) $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(2) $x = -2 \pm \sqrt{2}i$ 또는 $x = -4 \pm \sqrt{10}$

(3) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ 또는 $x = \frac{-1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

(4) $x = 1$ 또는 $x = 6$ 또는 $x = \frac{-9 \pm \sqrt{57}}{2}$

211 (1) $x = \pm \sqrt{5}$ 또는 $x = \pm 2i$

(2) $x = \pm 2$ 또는 $x = \pm \sqrt{6}i$

(3) $x = -1 \pm \sqrt{2}$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}$

(4) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{23}i}{4}$ 또는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{4}$

212 (1) $x = \pm i$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ (2) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

209

(1) 인수분해 공식을 이용하여 좌변을 인수분해하여 풀면

$$(x+3)(x^2-3x+9)=0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

(2) 인수분해 공식을 이용하여 좌변을 인수분해하여 풀면

$$(x+2)(x-2)(x^2+4)=0$$

$$\therefore x = \pm 2 \text{ 또는 } x = \pm 2i$$

(3) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$ 이라 할 때, $f(1) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -8 & 17 & -10 \\ & & 1 & -7 & 10 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x-1)(x^2-7x+10)$$

따라서 주어진 방정식의 해를 구하면

$$(x-1)(x^2-7x+10)=0$$

$$(x-1)(x-2)(x-5)=0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 5$$

(4) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 7x + 6$ 이라 할 때, $f(-2) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 4 & 7 & 6 \\ & & -2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x+2)(x^2+2x+3)$$

따라서 주어진 방정식의 해를 구하면

$$(x+2)(x^2+2x+3)=0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = -1 \pm \sqrt{2}i$$

210

(1) $x^2 + x = X$ 로 치환하여 좌변을 인수분해하면

$$X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1) = 0$$

이 식에 $X = x^2 + x$ 를 대입하여 인수분해한 후, 근의 공식을 이용하면

$$(x^2+x-2)(x^2+x+1)=0$$

$$(x+2)(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(2) $x^2 + 6 = X$ 로 치환하여 정리하면

$$(X+5x)(X+7x) - 3x^2 = 0$$

좌변을 인수분해하면

$$(X+5x)(X+7x) - 3x^2$$

$$= X^2 + 12xX + 32x^2 = (X+4x)(X+8x) = 0$$

이 식에 $X = x^2 + 6$ 을 대입하여 근의 공식을 이용하면

$$(x^2+4x+6)(x^2+8x+6)=0$$

$$\therefore x = -2 \pm \sqrt{2}i \text{ 또는 } x = -4 \pm \sqrt{10}$$

(3) 좌변의 두 일차식의 상수항의 합이 같게 되도록 일차식을 두 개씩 짝지어 전개하면

$$\begin{aligned} & \{(x-1)(x+2)\} \{(x-3)(x+4)\} + 9 \\ & \quad \text{상수항의 합:1} \quad \text{상수항의 합:1} \\ & = (x^2+x-2)(x^2+x-12) + 9 \end{aligned}$$

$x^2 + x = X$ 로 치환하여 좌변을 인수분해하면

$$(X-2)(X-12) + 9$$

$$= X^2 - 14X + 33$$

$$= (X-3)(X-11) = 0$$

이 식에 $X = x^2 + x$ 를 대입하여 근의 공식을 이용하면

$$(x^2+x-3)(x^2+x-11)=0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

(4) 두 일차식의 상수항의 곱이 같게 되도록 일차식을 두 개씩 짝지으면

$$\begin{aligned} & \{(x+1)(x+6)\} \{(x-2)(x-3)\} = 28x^2 \\ & \quad \text{상수항의 곱:6} \quad \text{상수항의 곱:6} \\ & = (x^2+7x+6)(x^2-5x+6) - 28x^2 = 0 \end{aligned}$$

$x^2 + 6 = X$ 로 치환하여 좌변을 인수분해하면

$$(X+7x)(X-5x) - 28x^2 = X^2 + 2xX - 63x^2$$

$$= (X-7x)(X+9x) = 0$$

이 식에 $X = x^2 + 6$ 을 대입하여 인수분해한 후, 근의 공식을 이용하면

$$(x^2-7x+6)(x^2+9x+6)=0$$

$$(x-1)(x-6)(x^2+9x+6)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=6 \text{ 또는 } x=\frac{-9\pm\sqrt{57}}{2}$$

211

- (1) 복이차방정식이므로 $x^2=t$ 로 치환하여 좌변을 인수분해하면

$$t^2-t-20=0 \quad \therefore (t-5)(t+4)=0$$

$t=x^2$ 을 대입하여 해를 구하면

$$(x^2-5)(x^2+4)=0$$

$$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x+2i)(x-2i)=0$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{5} \text{ 또는 } x=\pm 2i$$

- (2) 복이차방정식이므로 $x^2=t$ 로 치환하여 좌변을 인수분해하면

$$t^2+2t-24=0 \quad \therefore (t-4)(t+6)=0$$

$t=x^2$ 을 대입하여 해를 구하면

$$(x^2-4)(x^2+6)=0$$

$$(x+2)(x-2)(x+\sqrt{6}i)(x-\sqrt{6}i)=0$$

$$\therefore x=\pm 2 \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{6}i$$

- (3) 복이차방정식이므로 $x^2=t$ 로 치환하면

$$t^2-6t+1=0$$

인수분해가 되지 않으므로 주어진 방정식을 $A^2-B^2=0$ 의 꼴로 변형한 후, 인수분해하여 근의 공식을 이용하면

$$x^4-2x^2+1-4x^2=0, (x^2-1)^2-(2x)^2=0$$

$$(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)=0$$

$$\therefore x=-1\pm\sqrt{2} \text{ 또는 } x=1\pm\sqrt{2}$$

- (4) 복이차방정식이므로 $x^2=t$ 로 치환하면

$$4t^2+11t+9=0$$

인수분해가 되지 않으므로 주어진 방정식을 $A^2-B^2=0$ 의 꼴로 변형한 후, 인수분해하여 근의 공식을 이용하면

$$4x^4+12x^2+9-x^2=0, (2x^2+3)^2-x^2=0$$

$$(2x^2+x+3)(2x^2-x+3)=0$$

$$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{4} \text{ 또는 } x=\frac{1\pm\sqrt{23}i}{4}$$

212

- (1) $x=0$ 은 주어진 방정식을 만족하지 않으므로 양변을 x^2 으로 나누어 정리하면

$$x^2+x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}+\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

곱셈 공식의 변형 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ 를 이용하여 ①

을 변형하면

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$$

$$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

$$x+\frac{1}{x}=t \text{로 치환하여 풀면 } t^2+t=0$$

$$t(t+1)=0 \quad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=-1$$

- (i) $t=0$ 일 때, $x+\frac{1}{x}=0$ 이므로 양변에 x 를 곱하여 풀면

$$x^2+1=0 \quad \therefore x=\pm i$$

- (ii) $t=-1$ 일 때, $x+\frac{1}{x}=-1$ 이므로 양변에 x 를 곱하여 풀면

$$x^2+x+1=0 \quad \therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

- (2) $x=0$ 은 주어진 방정식을 만족하지 않으므로 양변을 x^2 으로 나누어 정리하면

$$x^2+2x+3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

곱셈 공식의 변형 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ 를 이용하여 ①

을 변형하면

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$

$$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

$$x+\frac{1}{x}=t \text{로 치환하여 풀면 } t^2+2t+1=0$$

$$(t+1)^2=0 \quad \therefore t=-1$$

- $t=-1$ 일 때, $x+\frac{1}{x}=-1$ 이므로 양변에 x 를 곱하여 풀면

$$x^2+x+1=0 \quad \therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

05 삼차방정식의 근의 성질

개념 확인 문제

p. 158

$$1 \text{ (1) } 2 \text{ (2) } 3 \text{ (3) } -5 \quad 2 \text{ } x^3-3x^2-2x-7=0$$

$$3 \text{ (1) } x^3-9x^2+26x-24=0 \text{ (2) } x^3+8x^2+5x-14=0$$

$$(3) x^3-3x^2+x+1=0 \quad (4) x^3-\sqrt{3}x^2+2x-2\sqrt{3}=0$$

1

$x^3-2x^2+3x+5=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$$(1) \alpha+\beta+\gamma=-\frac{-2}{1}=2 \quad (2) \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{3}{1}=3$$

$$(3) \alpha\beta\gamma=-\frac{5}{1}=-5$$

2

x^3 의 계수가 1이고, α, β, γ 가 세 근인 삼차방정식은
 $x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$
 이므로 구하는 방정식은 $x^3 - 3x^2 - 2x - 7 = 0$

3

x^3 의 계수가 1이고, α, β, γ 가 세 근인 삼차방정식은
 $x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$
 이므로 각각의 근을 α, β, γ 라 하면

- (1) $\alpha=2, \beta=3, \gamma=4$ 에서 $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$
 (2) $\alpha=-7, \beta=-2, \gamma=1$ 에서 $x^3 + 8x^2 + 5x - 14 = 0$
 (3) $\alpha=1, \beta=1+\sqrt{2}, \gamma=1-\sqrt{2}$ 에서 $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$
 (4) $\alpha=\sqrt{3}, \beta=\sqrt{2}i, \gamma=-\sqrt{2}i$ 에서 $x^3 - \sqrt{3}x^2 + 2x - 2\sqrt{3} = 0$

유 제

pp. 159~161

- 213 (1) 5 (2) $\frac{2}{5}$ (3) 24 (4) $-\frac{9}{5}$
 214 (1) $x^3 + 2x - 4 = 0$ (2) $x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$
 215 -15 216 $a=1, b=-2, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, 2$
 217 (1) 0 (2) 1 218 -1 219 1

213

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta + \gamma = 3, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \alpha\beta\gamma = 5$$

- (1) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$
 $= 3^2 - 2 \cdot 2 = 5$
 (2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{2}{5}$
 (3) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma$
 $= 3(5 - 2) + 3 \cdot 5 = 24$
 (4) $\frac{\alpha + \beta}{\gamma} + \frac{\beta + \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta} = \frac{3 - \gamma}{\gamma} + \frac{3 - \alpha}{\alpha} + \frac{3 - \beta}{\beta}$
 $= 3\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) - 3$
 $= 3 \cdot \frac{2}{5} - 3 = -\frac{9}{5}$

214

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta + \gamma = -1, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \alpha\beta\gamma = -2$$

- (1) 구하는 삼차방정식의 세 근이 $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$ 이므로
 (i) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$
 (ii) $\alpha\beta \cdot \beta\gamma + \beta\gamma \cdot \gamma\alpha + \gamma\alpha \cdot \alpha\beta = \alpha\beta^2\gamma + \beta\gamma^2\alpha + \gamma\alpha^2\beta$
 $= \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$

$$= (-2) \cdot (-1) = 2$$

$$(iii) \alpha\beta \cdot \beta\gamma \cdot \gamma\alpha = (\alpha\beta\gamma)^2 = (-2)^2 = 4$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에 의해 구하는 방정식은 } x^3 + 2x - 4 = 0$$

(2) 구하는 삼차방정식의 세 근이 $\alpha+1, \beta+1, \gamma+1$ 이므로

$$(i) (\alpha+1) + (\beta+1) + (\gamma+1) = \alpha + \beta + \gamma + 3$$

$$= (-1) + 3 = 2$$

$$(ii) (\alpha+1)(\beta+1) + (\beta+1)(\gamma+1) + (\gamma+1)(\alpha+1)$$

$$= \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 + \beta\gamma + \beta + \gamma + 1 + \gamma\alpha + \gamma + \alpha + 1$$

$$= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 2(\alpha + \beta + \gamma) + 3$$

$$= 0 + 2 \cdot (-1) + 3 = 1$$

$$(iii) (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$$

$$= \alpha\beta\gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha + \beta + \gamma + 1$$

$$= -2 + 0 + (-1) + 1 = -2$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에 의해 구하는 방정식은 } x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$$

215

a, b 가 실수이므로 주어진 삼차방정식의 한 근이 $1 + \sqrt{2}i$ 이면
 또 다른 허근은 $1 + \sqrt{2}i$ 의 켤레복소수인 $1 - \sqrt{2}i$ 이다.

이때 나머지 한 실근을 a 라 하면 근과 계수의 관계에 의해
 세 근의 합은 $-a$ 이므로

$$(1 + \sqrt{2}i) + (1 - \sqrt{2}i) + a = -a$$

$$\therefore 2 + a = -a \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

세 근 중에서 두 근끼리의 곱의 합은 b 이므로

$$(1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) + a(1 + \sqrt{2}i) + a(1 - \sqrt{2}i) = b$$

$$\therefore 3 + 2a = b \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

세 근의 곱은 3이므로

$$(1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i)a = 3, 3a = 3 \quad \therefore a = 1$$

$a=1$ 을 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에 대입하면 $a = -3, b = 5$

$$\therefore ab = (-3) \cdot 5 = -15$$

216

a, b 가 유리수이므로 주어진 삼차방정식의 한 근이 $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$

이면, 다른 한 근은 $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ 이다.

이때 나머지 한 근을 a 라 하면 근과 계수의 관계에 의해
 세 근의 합은 $-a$ 이므로

$$\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) + a = -a$$

$$\therefore -3 + a = -a \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

세 근 중에서 두 근끼리의 곱의 합은 -5 이므로

$$\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cdot a$$

$$+ \left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) \cdot a = -5$$

$$\therefore 1-3\alpha=-5 \quad \therefore \alpha=2 \quad \dots\dots\textcircled{L}$$

세 근의 곱은 $-b$ 이므로

$$\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \alpha = -b$$

$$\therefore \alpha = -b \quad \dots\dots\textcircled{E}$$

$\textcircled{L}$ 을 $\textcircled{I}$, $\textcircled{E}$ 에 대입하면 $a=1, b=-2$

따라서 $a=1, b=-2$ 이고 나머지 두 근은 $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, 2$ 이다.

217

$x^3+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로 $\omega^3=-1 \quad \dots\textcircled{I}$

$x^3+1=0$ 의 좌변을 인수분해하면

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$

그런데 ω 는 허근이므로 ω 는 $x^2-x+1=0$ 의 근이다.

$$\therefore \omega^2-\omega+1=0 \quad \therefore \omega^2+1=\omega, \omega-1=\omega^2 \quad \dots\textcircled{L}$$

$$(1) \omega^{99}=(\omega^3)^{33}=(-1)^{33}(\because \textcircled{I})=-1$$

$$\omega^{100}=(\omega^3)^{33} \cdot \omega = -\omega (\because \textcircled{I})$$

$$\omega^{101}=(\omega^3)^{33} \cdot \omega^2 = -\omega^2 (\because \textcircled{I}) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \omega^{99}-\omega^{100}+\omega^{101} &= -1 - (-\omega) - \omega^2 \\ &= -(1-\omega+\omega^2)=0 (\because \textcircled{L}) \end{aligned}$$

(2) $\omega^2-\omega+1=0$ 이므로 양변을 ω 로 나누어 정리하면

$$\omega-1+\frac{1}{\omega}=0 \quad \therefore \omega+\frac{1}{\omega}=1$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\omega^2+1}{\omega-1} + \frac{\omega-1}{\omega^2+1} &= \frac{\omega}{\omega^2} + \frac{\omega^2}{\omega} (\because \textcircled{L}) \\ &= \omega + \frac{1}{\omega} = 1 \end{aligned}$$

218

ω 는 $x^2+x+1=0$ 의 한 근이므로 $\omega^2+\omega+1=0$

양변을 ω 로 나누면 $\omega+1+\frac{1}{\omega}=0 \quad \therefore \omega+\frac{1}{\omega}=-1$

또한, $x^2+x+1=0$ 의 양변에 $x-1$ 을 곱하면

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

즉, $x^3-1=0$ 이므로 $\omega^3=1$

$\omega^2+\frac{1}{\omega^2}, \omega^3+\frac{1}{\omega^3}, \omega^4+\frac{1}{\omega^4}, \dots$ 을 차례로 구하면

$$\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2-2=(-1)^2-2=-1$$

$$\omega^3+\frac{1}{\omega^3}=1+\frac{1}{1}=2$$

$$\omega^4+\frac{1}{\omega^4}=\omega^3 \cdot \omega + \frac{1}{\omega^3 \cdot \omega} = \omega + \frac{1}{\omega} = -1, \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= (-1-1+2) + (-1-1+2) \\ &\quad + (-1-1+2) + (-1) = -1 \end{aligned}$$

219

$$x=\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \text{에서} \quad 2x-1=-\sqrt{3}i$$

양변을 제곱하면 $4x^2-4x+1=-3$

$$4x^2-4x+4=0 \quad \therefore x^2-x+1=0$$

또한, $x^2-x+1=0$ 의 양변에 $x+1$ 을 곱하면

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$

즉, $x^3+1=0$ 이므로 $x^3=-1 \quad \dots\dots\textcircled{I}$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^{11}}{1+x^{10}} + \frac{1+x^{14}}{x^{13}} + \frac{1}{x^{16}+x^{20}} \\ &= \frac{(x^3)^3 \cdot x^2}{1+(x^3)^3 \cdot x} + \frac{1+(x^3)^4 \cdot x^2}{(x^3)^4 \cdot x} + \frac{1}{(x^3)^5 \cdot x + (x^3)^6 \cdot x^2} \\ &= \frac{-x^2}{1-x} + \frac{1+x^2}{x} + \frac{1}{-x+x^2} (\because \textcircled{I}) \\ &= \frac{-x^2}{-x^2} + \frac{x}{x} + \frac{1}{-1} = 1+1-1=1 \end{aligned}$$

소단원 연습문제

pp. 162~163

001 ④	002 ⑤	003 5	004 -3	005 ④
006 ①	007 ①	008 3	009 2	

001

$f(x)=x^4+2x^3+x^2-2x-2$ 라 할 때, $f(1)=0, f(-1)=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ & & & 1 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ & & -1 & -2 & -2 \\ & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x+1)(x-1)(x^2+2x+2)$$

따라서 주어진 방정식의 해를 구하면

$$(x+1)(x-1)(x^2+2x+2)=0$$

$$\therefore x=\pm 1 \text{ 또는 } x=-1\pm i$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha\beta+\gamma\delta &= 1 \cdot (-1) + (-1+i)(-1-i) \\ &= -1+2=1 \end{aligned}$$

002

a 가 실수이므로 주어진 삼차방정식의 한 근이 $1+i$ 이면 나머지 한 허근은 $1+i$ 의 켤레복소수인 $1-i$ 이다.

이때 나머지 한 실근을 α 라 하면 근과 계수의 관계에 의해 세 근 중에서 두 근끼리의 곱의 합은 4이므로

$$(1+i)(1-i)+\alpha(1+i)+\alpha(1-i)=4$$

$$2+2\alpha=4 \quad \therefore \alpha=1$$

또한, 근과 계수의 관계에 의해 세 근의 합은 $a+1$ 이므로

$$\begin{aligned}(1+i) + (1-i) + \alpha &= a+1 \\ 2+\alpha &= a+1 \quad \therefore a=\alpha+1 \\ \alpha=1 \text{을 이 식에 대입하면} \quad a &= 2\end{aligned}$$

003

삼차방정식의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= 2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1, \alpha\beta\gamma = -1 \\ \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 \text{의 값을 구하면} \\ \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 &= (\alpha\beta)^2 + (\beta\gamma)^2 + (\gamma\alpha)^2 \\ &= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= (-1)^2 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 = 1 + 4 = 5\end{aligned}$$

004

$x=0$ 은 주어진 방정식을 만족하지 않으므로 양변을 x^2 으로 나누어 정리하면

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} &= 0 \\ \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 &= 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

곱셈 공식의 변형 $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$ 를 이용하여 $\textcircled{1}$ 을 변형하면

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 &= 0 \\ \therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 &= 0\end{aligned}$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하여 풀면

$$\begin{aligned}t^2 + 2t - 3 &= 0, (t+3)(t-1) = 0 \\ \therefore t &= -3 \text{ 또는 } t = 1 \quad \therefore x + \frac{1}{x} = -3 \text{ 또는 } x + \frac{1}{x} = 1\end{aligned}$$

그런데 $x + \frac{1}{x} = 1$ 의 양변에 x 를 곱하여 판별식 D 를 구하면

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

즉, x 는 실수가 아니므로 $x + \frac{1}{x} = 1$ 은 주어진 조건을 만족하지 않는다.

$$\therefore x + \frac{1}{x} = -3$$

005

$x^3=1$, 즉 $x^3-1=0$ 의 좌변을 인수분해하면

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

그런데 ω_1, ω_2 는 허근이므로 $x^2+x+1=0$ 의 두 근이다.

$\neg$. ω_1, ω_2 는 $x^2+x+1=0$ 의 두 허근이므로

$$\text{근과 계수의 관계에 의해} \quad \omega_1 + \omega_2 = -1 (\because \text{참})$$

$\neg$. ω_1, ω_2 는 $x^2+x+1=0$ 의 두 허근이므로

$$\begin{aligned}\omega_1^2 + \omega_1 + 1 &= 0 \Rightarrow \omega_1^2 = -\omega_1 - 1 \\ \omega_2^2 + \omega_2 + 1 &= 0 \Rightarrow \omega_2^2 = -\omega_2 - 1 \\ \therefore \omega_1^2 + \omega_2^2 &= -\omega_1 - 1 - \omega_2 - 1 \\ &= -(\omega_1 + \omega_2) - 2 \\ &= -(-1) - 2 (\because \neg) \\ &= -1 (\because \text{참})\end{aligned}$$

$\neg$. ω_1, ω_2 는 $x^3=1$ 의 두 허근이므로

$$\omega_1^3 = 1, \omega_2^3 = 1$$

또한, ω_1, ω_2 는 $x^2+x+1=0$ 의 두 허근이므로

$$\omega_1\omega_2 = 1 \quad \therefore \omega_1 = \frac{1}{\omega_2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\omega_1^{100} = (\omega_1^3)^{33} \cdot \omega_1 = \omega_1$$

$$\omega_2^{100} = (\omega_2^3)^{33} \cdot \omega_2 = \omega_2$$

$$\begin{aligned}\therefore \omega_1^{100} + \frac{1}{\omega_2^{100}} &= \omega_1 + \frac{1}{\omega_2} = \omega_1 + \omega_1 (\because \textcircled{1}) \\ &= 2\omega_1 (\because \text{거짓})\end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

006

주어진 삼차방정식에서 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1, \alpha\beta\gamma = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

구하는 삼차방정식의 세 근 $\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \frac{\gamma+\alpha}{\beta^2}, \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}$ 의 합을 구하면

$$\begin{aligned}\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2} &= \frac{-\alpha}{\alpha^2} + \frac{-\beta}{\beta^2} + \frac{-\gamma}{\gamma^2} \\ &= -\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} \\ &= -\left(\frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\right) \\ &= 1 (\because \textcircled{1})\end{aligned}$$

세 근 중에서 두 근끼리의 곱의 합을 구하면

$$\begin{aligned}\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2} \cdot \frac{\gamma+\alpha}{\beta^2} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2} \cdot \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2} \\ = \frac{-\alpha}{\alpha^2} \cdot \frac{-\beta}{\beta^2} + \frac{-\beta}{\beta^2} \cdot \frac{-\gamma}{\gamma^2} + \frac{-\gamma}{\gamma^2} \cdot \frac{-\alpha}{\alpha^2} \\ = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} = 0 (\because \textcircled{1})\end{aligned}$$

세 근의 곱을 구하면

$$\begin{aligned}\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2} \cdot \frac{\gamma+\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2} \\ = \frac{-\alpha}{\alpha^2} \cdot \frac{-\beta}{\beta^2} \cdot \frac{-\gamma}{\gamma^2} = -\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 1\end{aligned}$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$$x^3 - x^2 - 1 = 0$$

007

$f(x) = x^3 + (a-2)x^2 - (2a-3)x - 6$ 이라 할 때, $f(2) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & a-2 & -2a+3 & -6 \\ & & 2 & 2a & 6 \\ \hline & 1 & a & 3 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x-2)(x^2 + ax + 3)$$

$$\therefore (x-2)(x^2 + ax + 3) = 0$$

이 방정식이 양의 실근만을 가지려면 한 근 $x=2 > 0$ 이므로 $x^2 + ax + 3 = 0$ 의 두 근이 모두 양수이어야 한다.

두 근이 모두 양수일 조건은

(i) $D \geq 0$ (ii) (두 근의 합) > 0 (iii) (두 근의 곱) > 0

(i) $D \geq 0 \Rightarrow D = a^2 - 12 \geq 0, (a-2\sqrt{3})(a+2\sqrt{3}) \geq 0$

$$\therefore a \leq -2\sqrt{3} \text{ 또는 } a \geq 2\sqrt{3}$$

(ii) (두 근의 합) $= -a > 0 \therefore a < 0$

(iii) (두 근의 곱) $= 3 > 0 \therefore a$ 는 모든 실수

(i), (ii), (iii)을 동시에 만족하는 a 의 값의 범위는 $a \leq -2\sqrt{3}$ 따라서 a 의 최댓값은 $-2\sqrt{3}$ 이다.

008

삼차방정식의 세 정수해가 a, b, c 일 때, 근과 계수의 관계에 의해

$$a + b + c = -a \dots\dots \textcircled{1}$$

$$abc = -c \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 에서 $abc + c = 0$, 즉 $c(ab + 1) = 0$ 이므로

$$ab = -1 (\because c \neq 0)$$

이때 a, b 는 정수이므로

$$a = -1, b = 1 \text{ 또는 } a = 1, b = -1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

(i) $a = -1, b = 1$ 일 때, $-1 + 1 + c = 1 \therefore c = 1$

(ii) $a = 1, b = -1$ 일 때, $1 - 1 + c = -1 \therefore c = -1$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (\pm 1)^2 + (\mp 1)^2 + (\mp 1)^2 = 3$$

009

다항식 $x^{101} - x^{99} + 1$ 을 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하고, 나눗셈의 식으로 나타내면

$$x^{101} - x^{99} + 1 = (x^2 - x + 1)Q(x) + ax + b \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 하고, $\textcircled{1}$ 의 양변에 ω 를 대입하면

$$\omega^{101} - \omega^{99} + 1 = (\omega^2 - \omega + 1)Q(\omega) + a\omega + b \dots\dots \textcircled{2}$$

ω 는 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 근이므로 $\omega^2 - \omega + 1 = 0$

또한, $x^2 - x + 1 = 0$ 의 양변에 $x + 1$ 을 곱하면

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

즉, $x^3 + 1 = 0$ 이므로 $\omega^3 = -1 \dots\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}$ 을 이용하여 $\textcircled{1}$ 의 좌변과 우변을 정리하면

$$(\text{좌변}) = (\omega^3)^{33} \cdot \omega^2 - (\omega^3)^{33} + 1 = -\omega^2 + 2 = -\omega + 3$$

$$(\text{우변}) = a\omega + b$$

그런데 a, b 는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의해

$$a = -1, b = 3 \therefore a + b = 2$$

06 연립방정식

개념 확인 문제

p. 164

- 1 (1) $x=2, y=-1$ (2) $x=2, y=-3$
(3) 해가 없다. (4) 해가 무수히 많다.

1

$$(1) \begin{cases} 2x - y = 5 & \dots\dots \textcircled{1} \\ x + y = 1 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases} \text{에서}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{을 하면 } 3x = 6 \therefore x = 2$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } y = -1$$

$$(2) \begin{cases} 3x + 2y = 0 & \dots\dots \textcircled{1} \\ 2x - y = 7 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases} \text{에서}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 2 \text{를 하면 } 7x = 14 \therefore x = 2$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } y = -3$$

$$(3) \begin{cases} 2x + 4y = 1 & \dots\dots \textcircled{1} \\ 4x + 8y = 3 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases} \text{에서}$$

$$\textcircled{1} \times 2 \text{를 하면 } 4x + 8y = 2 \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 비교하면 $2 = 3$ 이라는 모순이 생기므로 해가 없다.

$$(4) \begin{cases} -x + y = 1 & \dots\dots \textcircled{1} \\ 3x - 3y = -3 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases} \text{에서}$$

$$\textcircled{1} \times (-3) \text{을 하면 } 3x - 3y = -3 \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 비교하면 $\textcircled{2} = \textcircled{3}$ 이므로 해가 무수히 많다.

유 제

pp. 165~170

$$220 (1) x=2, y=3, z=-1 (2) x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{2}, z=\frac{1}{5}$$

$$221 (1) x=1, y=2, z=-2 (2) x=7, y=-2, z=0$$

$$222 6 \quad 223 (1) \text{ 해가 무수히 많다. } (2) \text{ 해가 없다.}$$

$$224 16 \quad 225 4 \quad 226 (1) \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{17}{4} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$$

$$227 3개 \quad 228 (1) \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=\frac{9}{5} \\ y=-\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$229 \begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3}i \\ y=-\frac{5\sqrt{3}}{3}i \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-\frac{\sqrt{3}}{3}i \\ y=\frac{5\sqrt{3}}{3}i \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$\text{또는 } \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$230 (1) \begin{cases} x=-2+\sqrt{3}i \\ y=-2-\sqrt{3}i \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-2-\sqrt{3}i \\ y=-2+\sqrt{3}i \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

$$231 \textcircled{3} \quad 232 \textcircled{3}$$

220

(1) ㉠+㉡을 하면 $5x+3y=19$ ㉢
 $\textcircled{L}+3\times\textcircled{7}$ 을 하면 $7x+2y=20$ ㉣
 $\textcircled{B}\times 2-\textcircled{A}\times 3$ 을 하면 $-11x=-22 \quad \therefore x=2$
 $x=2$ 를 ㉢에 대입하면 $14+2y=20 \quad \therefore y=3$
 $x=2, y=3$ 을 ㉠에 대입하면 $4+3-z=8$
 $\therefore z=-1$

(2) $\frac{1}{x}=a, \frac{1}{y}=b, \frac{1}{z}=c$ 라 하면

$$\begin{cases} a+b-3c=-10 & \cdots \cdots \textcircled{7}' \\ a-b+2c=11 & \cdots \cdots \textcircled{L}' \\ 2a+b-c=3 & \cdots \cdots \textcircled{B}' \end{cases}$$

$\textcircled{7}'+\textcircled{L}'$ 을 하면 $2a-c=1$ ㉠
 $\textcircled{L}'+\textcircled{B}'$ 을 하면 $3a+c=14$ ㉡

$\textcircled{B}+\textcircled{A}$ 을 하면 $5a=15 \quad \therefore a=3$

$a=3$ 을 ㉡에 대입하면 $c=5$

$a=3, c=5$ 를 ㉠'에 대입하면 $b=2$

따라서 $a=3, b=2, c=5$ 이므로

$$x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{2}, z=\frac{1}{5}$$

221

(1) ㉠+㉡+㉢을 하면 $2x+4y+6z=-2$
 $\therefore x+2y+3z=-1$ ㉣

$\textcircled{B}-\textcircled{7}$ 을 하면 $3z=-6 \quad \therefore z=-2$

$\textcircled{B}-\textcircled{L}$ 을 하면 $x=1$

$\textcircled{B}-\textcircled{B}$ 을 하면 $2y=4 \quad \therefore y=2$

(2) ㉠+㉡+㉢을 하면 $4(x+y+z)=20$
 $\therefore x+y+z=5$ ㉣

$\textcircled{7}-\textcircled{B}$ 을 하면 $x=7$

$\textcircled{L}-\textcircled{B}$ 을 하면 $y=-2$

$\textcircled{B}-\textcircled{B}$ 을 하면 $z=0$

222

$$\frac{2x+y}{4}=2y-z=\frac{3x+z}{6}=1 \text{을 변형하면}$$

$$\begin{cases} 2x+y=4 & \cdots \cdots \textcircled{7} \\ 2y-z=1 & \cdots \cdots \textcircled{L} \\ 3x+z=6 & \cdots \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

$\textcircled{L}+\textcircled{B}$ 을 하면 $3x+2y=7$ ㉠

$\textcircled{7}\times 2-\textcircled{B}$ 을 하면 $x=1$

$x=1$ 을 ㉠에 대입하면 $3+2y=7 \quad \therefore y=2$

$x=1$ 을 ㉢에 대입하면 $3+z=6 \quad \therefore z=3$

$$\therefore a+\beta+\gamma=1+2+3=6$$

223

(1) ㉠+㉡을 하면 $3x+2y=5$ ㉢

$\textcircled{B}-\textcircled{L}$ 을 하면 $3x+2y=5$ ㉣

㉢, ㉣을 비교하면 $\textcircled{B}=\textcircled{B}$

따라서 ㉢, ㉣을 만족하는 x, y 의 값은 무수히 많으므로 z 의 값도 무수히 많다.

따라서 주어진 연립방정식은 해가 무수히 많다.

(2) ㉠-㉡을 하면 $x+y=1$ ㉣

$\textcircled{L}+\textcircled{B}$ 을 하면 $x+y=2$ ㉤

㉣, ㉤을 비교하면 $1=2 \Rightarrow$ 모순

따라서 주어진 연립방정식은 해가 없다.

224

$\textcircled{7}-\textcircled{L}$ 을 하면 $y-4z=4-a$ ㉢

$\textcircled{L}+\textcircled{B}$ 을 하면 $3y+(1+b)z=a$ ㉣

$\textcircled{B}\times 3-\textcircled{A}$ 을 하면 $(13+b)z=4a-12$ ㉤

주어진 연립방정식의 해가 무수히 많으려면 z 의 값이 무수히 많아야 한다.

따라서 ㉤이 모든 실수 z 에 대하여 성립해야 하므로

$$13+b=0, 4a-12=0$$

$$\therefore a=3, b=-13 \quad \therefore a-b=3-(-13)=16$$

225

$\textcircled{7}\times 3+\textcircled{L}$ 을 하면 $11x+(k-15)z=18$ ㉢

$\textcircled{7}\times 2+\textcircled{B}$ 을 하면 $11x-11z=11$ ㉣

$\textcircled{B}-\textcircled{A}$ 을 하면 $(k-4)z=7$ ㉤

주어진 연립방정식의 해가 존재하지 않으려면 z 의 값이 존재하지 않아야 한다.

이때 ㉤에서 $k=4$ 이면 $0\cdot z=7$ 이 되어 z 의 값이 존재하지

않으므로 주어진 연립방정식은 해가 존재하지 않는다.

$$\therefore k=4$$

226

(1) ㉠에서 $x=2y-9$ 를 ㉡에 대입하면

$$(2y-9)^2+3y=13, 4y^2-33y+68=0$$

$$(y-4)(4y-17)=0 \quad \therefore y=4 \text{ 또는 } y=\frac{17}{4}$$

이를 ㉠에 대입하면 $x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

$$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{17}{4} \end{cases}$$

(2) ㉡의 좌변을 인수분해하면

$$(3x+4y)(4x-3y)=0$$

$$\therefore x=-\frac{4}{3}y \text{ 또는 } x=\frac{3}{4}y$$

(i) $x=-\frac{4}{3}y$ 를 ㉠에 대입하면

$$\left(-\frac{4}{3}y\right)^2+y^2=25, 25y^2=225$$

$$y^2=9 \quad \therefore y=\pm 3$$

이를 $x=-\frac{4}{3}y$ 에 대입하면 $x=\mp 4$ (복부호동순)

(ii) $x=\frac{3}{4}y$ 를 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{3}{4}y\right)^2+y^2=25, 25y^2=400$$

$$y^2=16 \quad \therefore y=\pm 4$$

이를 $x=\frac{3}{4}y$ 에 대입하면 $x=\pm 3$ (복부호동순)

(i), (ii)에서

$$\begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$$

227

$$\begin{cases} 2xy=x^2 & \dots\dots \text{㉠} \\ 2xy=y^2-y & \dots\dots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠을 변형하여 인수분해하면

$$x^2-2xy=0, x(x-2y)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=2y$$

(i) $x=0$ 을 ㉡에 대입하면

$$y^2-y=0, y(y-1)=0 \quad \therefore y=0 \text{ 또는 } y=1$$

(ii) $x=2y$ 를 ㉡에 대입하면

$$4y^2=y^2-y, y(3y+1)=0$$

$$\therefore y=0 \text{ 또는 } y=-\frac{1}{3}$$

이를 $x=2y$ 에 대입하면

$$x=0 \text{ 또는 } x=-\frac{2}{3}$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y) 는 $(0, 0), (0, 1),$

$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ 이므로 모두 3개이다.

228

(1) 두 이차식이 인수분해되지 않으므로 이차항을 소거한다.

㉠-㉡을 하면

$$x-y=-2, y=x+2 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$x^2+(x+2)^2+2x=0, 2x^2+6x+4=0$$

$$(x+1)(x+2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=-2$$

이를 ㉢에 대입하면 $y=1$ 또는 $y=0$

$$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

(2) 두 이차식이 인수분해되지 않으므로 이차항을 소거한다.

㉠-㉡ $\times 2$ 를 하면

$$x+3y=0 \quad \therefore x=-3y$$

$x=-3y$ 를 ㉡에 대입하면

$$(-3y)^2+y^2-3y-y=6, 5y^2-2y-3=0$$

$$(y-1)(5y+3)=0 \quad \therefore y=1 \text{ 또는 } y=-\frac{3}{5}$$

이를 $x=-3y$ 에 대입하면

$$x=-3 \text{ 또는 } x=\frac{9}{5}$$

$$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=\frac{9}{5} \\ y=-\frac{3}{5} \end{cases}$$

229

두 이차식이 인수분해되지 않고, 이차항을 소거해도 한 문자에 대한 간단한 식으로 정리할 수 없으므로 상수항을 소거한다.

㉠ $\times 3$ -㉡ $\times 4$ 를 하면

$$5x^2+6xy+y^2=0, (x+y)(5x+y)=0$$

$$\therefore y=-5x \text{ 또는 } y=-x$$

(i) $y=-5x$ 를 ㉠에 대입하면

$$3x^2-2x\cdot(-5x)-(-5x)^2=4$$

$$-12x^2=4 \quad \therefore x^2=-\frac{1}{3} \quad \therefore x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

이를 $y=-5x$ 에 대입하면

$$y=\mp\frac{5\sqrt{3}}{3}i \text{ (복부호동순)}$$

(ii) $y=-x$ 를 ㉠에 대입하면

$$3x^2 - 2x \cdot (-x) - (-x)^2 = 4$$

$$4x^2 = 4, x^2 = 1 \quad \therefore x = \pm 1$$

이를 $y=-x$ 에 대입하면 $y = \mp 1$ (복부호동순)

(i), (ii)에서

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ y = -\frac{5\sqrt{3}}{3}i \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}i \\ y = \frac{5\sqrt{3}}{3}i \end{cases}$$

$$\text{또는 } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

230

(1) 주어진 연립방정식을 변형하면

$$\begin{cases} xy + x + y = 3 \\ (x+y)^2 - 2xy = 2 \end{cases}$$

$x+y=u, xy=v$ 라 하면

$$\begin{cases} u+v=3 & \dots\dots \text{㉠} \\ u^2-2v=2 & \dots\dots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $v=3-u$ 를 ㉡에 대입하면

$$u^2 - 2(3-u) = 2, u^2 + 2u - 8 = 0$$

$$(u+4)(u-2) = 0 \quad \therefore u = -4 \text{ 또는 } u = 2$$

이를 ㉠에 대입하면 $v=7$ 또는 $v=-1$

(i) $u=-4, v=7$ 인 경우

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2 - (x+y)t + xy = 0 \quad \therefore t^2 + 4t + 7 = 0$$

$$\therefore t = -2 \pm \sqrt{3}i$$

$$\therefore x = -2 \pm \sqrt{3}i, y = -2 \mp \sqrt{3}i \text{(복부호동순)}$$

(ii) $u=2, v=-1$ 인 경우

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2 - (x+y)t + xy = 0 \quad \therefore t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0 \quad \therefore t = 1 \quad \therefore x = 1, y = 1$$

(i), (ii)에서

$$\begin{cases} x = -2 + \sqrt{3}i \\ y = -2 - \sqrt{3}i \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -2 - \sqrt{3}i \\ y = -2 + \sqrt{3}i \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

(2) 주어진 연립방정식을 변형하면

$$\begin{cases} x+y+xy=11 \\ xy(x+y)=30 \end{cases}$$

$x+y=u, xy=v$ 라 하면

$$\begin{cases} u+v=11 & \dots\dots \text{㉠} \\ uv=30 & \dots\dots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $v=11-u$ 를 ㉡에 대입하면

$$u(11-u) = 30, u^2 - 11u + 30 = 0$$

$$(u-5)(u-6) = 0 \quad \therefore u = 5 \text{ 또는 } u = 6$$

이를 ㉠에 대입하면 $v=6$ 또는 $v=5$

(i) $u=6, v=5$ 인 경우

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2 - (x+y)t + xy = 0 \quad \therefore t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$(t-1)(t-5) = 0 \quad \therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 5$$

$$\therefore x = 1, y = 5 \text{ 또는 } x = 5, y = 1$$

(ii) $u=5, v=6$ 인 경우

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2 - (x+y)t + xy = 0 \quad \therefore t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t-2)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 3$$

$$\therefore x = 2, y = 3 \text{ 또는 } x = 3, y = 2$$

(i), (ii)에서

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

231

처음 땅의 가로, 세로의 길이를 xm , ym 라 하면

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10^2 & \dots\dots \text{㉠} \\ (x-1)(y+2) = xy + 8 & \dots\dots \text{㉡} \end{cases}$$

㉡을 정리하면 $xy + 2x - y - 2 = xy + 8$

$$\therefore y = 2x - 10 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$x^2 + (2x-10)^2 = 10^2, 5x^2 - 40x = 0$$

$$x(x-8) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 8$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 8$

이를 ㉢에 대입하면 $y = 6$ ($\because y > 0$)

따라서 처음 땅의 넓이는 $xy = 48(m^2)$

232

A가 하루 동안 하는 일의 양은 $\frac{1}{x}$, B가 하루 동안 하는 일의

양은 $\frac{1}{y}$, C가 하루 동안 하는 일의 양은 $\frac{1}{z}$ 이라 하자.

A, B, C 세 명이 함께 작업하면 3일이 걸리므로

$$3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

B, C 두 명이 함께 작업하면 6일이 걸리므로

$$6\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

A가 2일, B가 3일, C가 6일 작업하면 일이 끝나므로

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{6}{z} = 1 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

이때 $\frac{1}{x} = X, \frac{1}{y} = Y, \frac{1}{z} = Z$ 라 하자.

㉠에서 $3X+3Y+3Z=1$ ㉡

㉢에서 $6Y+6Z=1$ ㉣

㉤에서 $2X+3Y+6Z=1$ ㉥

㉡ $\times 2 -$ ㉣을 하면 $6X=1 \quad \therefore X=\frac{1}{6}$

이를 ㉤에 대입하면 $\frac{1}{3}+3Y+6Z=1$

$\therefore 3Y+6Z=\frac{2}{3}$ ㉦

㉤ $-$ ㉦을 하면 $3Y=\frac{1}{3} \quad \therefore Y=\frac{1}{9}$

이를 ㉤에 대입하면 $6Z=\frac{1}{3} \quad \therefore Z=\frac{1}{18}$

따라서 $X=\frac{1}{6}, Y=\frac{1}{9}, Z=\frac{1}{18}$ 이므로

$x=6, y=9, z=18 \quad \therefore x+y+z=33$

07 공통근과 부정방정식

개념 확인 문제

p. 171

1 (1) (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1) (2) (2, 7), (6, 3)

유 제

pp. 172~173

233 -5 234 -1 235 $a=-\frac{5}{8}, b=-\frac{3}{8}$

236 (1) $x=3, y=1$ (2) $x=1, y=1$

237 (1) $x=2, y=1$ (2) $x=1, y=8$ 또는 $x=2, y=4$

233

두 이차방정식의 공통근을 a 라 하면

$a^2+pa+4=0 \quad \cdots \textcircled{1}, \quad a^2+4a+p=0 \quad \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면 $(p-4)a-(p-4)=0$

$(p-4)(a-1)=0 \quad \therefore p=4 \text{ 또는 } a=1$

그런데 $p=4$ 이면 두 이차방정식이 일치하여 두 개의 공통근을 가지므로 모순이다.

따라서 $a=1$ 이고, 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $p=-5$

234

두 이차방정식의 공통근을 a 라 하면

$a^2-2a+a^2=0 \quad \cdots \textcircled{1}, \quad a^2-aa+2a=0 \quad \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면

$(a-2)a+a^2-2a=0, (a-2)a+a(a-2)=0$

$(a-2)(a+a)=0 \quad \therefore a=2 \text{ 또는 } a=-a$

(i) $a=2$ 일 때, 두 이차방정식이 일치하여 두 개의 공통근을

가지므로 모순이다.

(ii) $a=-a$ 일 때, $a=-a$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$(-a)^2-2 \cdot (-a)+a^2=0, 2a^2+2a=0$

$2a(a+1)=0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=-1$

(i), (ii)에서 $a=0$ 또는 $a=-1$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은 $0+(-1)=-1$

235

두 이차방정식의 공통근을 a 라 하면

$a^2+aa+b=0 \quad \cdots \textcircled{1}, \quad a^2+ba+a=0 \quad \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면 $(a-b)(a-1)=0$

그런데 $a=b$ 이면 두 이차방정식이 일치하여 두 개의 공통근을 갖게 되어 모순이다.

$\therefore a=1$

또, $x^2+ax+b=0, x^2+bx+a=0$ 의 공통근이 아닌 각각의 두 근 β, γ 에 대하여 근과 계수의 관계에 의해

$1 \cdot \beta=b, 1 \cdot \gamma=a$

이때 공통근이 아닌 두 근 β, γ 의 비가 $3:5$ 이므로

$\beta:\gamma=3:5=b:a$

이를 비례상수 k 로 나타내면 $b=3k, a=5k \quad \cdots \textcircled{3}$

한편, $\textcircled{1}$ 에 $a=1$ 을 대입하면 $a+b+1=0 \quad \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{3}$ 을 $\textcircled{4}$ 에 대입하면 $5k+3k+1=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{8}$

$k=-\frac{1}{8}$ 을 $\textcircled{3}$ 에 대입하면 $a=-\frac{5}{8}, b=-\frac{3}{8}$

236

(1) **방법1** 실수 조건이 주어졌으므로 주어진 방정식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-6yx+10y^2-2y+1=0 \quad \cdots \textcircled{1}$

이때 x 는 실수이므로 방정식 $\textcircled{1}$ 은 실근을 갖는다.

$D \geq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = 9y^2-10y^2+2y-1 \geq 0$

$-y^2+2y-1 \geq 0, (y-1)^2 \leq 0$

그런데 $y-1$ 은 실수이므로 $(y-1)^2 \geq 0 \quad \therefore y=1$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2-6x+9=0, (x-3)^2=0$

$\therefore x=3$

방법2 실수 조건이 주어지고, 완전제곱꼴로 변형 가능하므로 주어진 방정식을 $A^2+B^2=0$ 의 꼴로 변형하면

$9y^2-6xy+x^2+y^2-2y+1=0$

$\therefore (3y-x)^2+(y-1)^2=0$

그런데 x, y 는 실수이므로 $3y-x=0, y-1=0$

두 식을 연립하면 $x=3, y=1$

(2) **방법1** 실수 조건이 주어졌으므로 주어진 방정식을 x 에 대

하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 + 2(y-2)x + 2y^2 - 6y + 5 = 0 \quad \cdots \textcircled{7}$$

이때 x 는 실수이므로 방정식 $\textcircled{7}$ 은 실근을 갖는다.

$$\therefore D \geq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = (y-2)^2 - (2y^2 - 6y + 5) \geq 0$$

$$-y^2 + 2y - 1 \geq 0, (y-1)^2 \leq 0$$

그런데 y 는 실수이므로 $(y-1)^2 \geq 0 \quad \therefore y=1$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$x^2 - 2x + 1 = 0, (x-1)^2 = 0 \quad \therefore x=1$$

방법2 실수 조건이 주어지고, 완전제곱꼴로 변형 가능하

므로 주어진 방정식을 $A^2 + B^2 = 0$ 의 꼴로 변형하면

$$x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 4x - 4y + y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$\therefore (x+y-2)^2 + (y-1)^2 = 0$$

그런데 x, y 는 실수이므로 $x+y-2=0, y-1=0$

두 식을 연립하면 $x=1, y=1$

237

- (1) 자연수, 즉 정수 조건이 주어졌으므로 주어진 방정식을 (일차식) $\times$ (일차식) = (정수)의 꼴로 변형하면

$$xy - 2x - y + 2 = -1, x(y-2) - (y-2) = -1$$

$$\therefore (x-1)(y-2) = -1$$

그런데 x, y 는 자연수이므로

$$x-1, y-2 \text{는 정수, } x-1 \geq 0$$

이때 $x-1, y-2$ 를 곱해서 -1 이 되는 경우는

$$x-1=1, y-2=-1 \quad \therefore x=2, y=1$$

- (2) 자연수 즉, 정수 조건이 주어졌으므로 주어진 방정식을 (일차식) $\times$ (일차식) = (정수)의 꼴로 변형하면

$$2xy - 4x - y + 2 = 6, 2x(y-2) - (y-2) = 6$$

$$\therefore (2x-1)(y-2) = 6$$

그런데 x, y 는 자연수이므로 $2x-1, y-2$ 는 정수

이때 $2x-1$ 은 홀수이므로 $2x-1, y-2$ 를 곱해서 6이 되는 경우는

$$2x-1=1, y-2=6 \text{ 또는 } 2x-1=3, y-2=2$$

$$\therefore x=1, y=8 \text{ 또는 } x=2, y=4$$

소단원 연습문제

pp. 174~175

001 ③	002 ⑤	003 ①	004 ④	005 4개
006 -3	007 17	008 4	009 ①	

001

주어진 등식에서 항등식의 성질에 의해

$$\begin{cases} a+b+c=0 & \cdots \textcircled{7} \\ 3a+5b+4c=0 & \cdots \textcircled{8} \\ 2a+6b+3c=2 & \cdots \textcircled{9} \end{cases}$$

$$\textcircled{7} \times 3 - \textcircled{8} \text{을 하면} \quad -2b-c=0 \quad \cdots \textcircled{10}$$

$$\textcircled{7} \times 2 - \textcircled{9} \text{을 하면} \quad -4b-c=-2 \quad \cdots \textcircled{11}$$

$$\textcircled{10} - \textcircled{11} \text{을 하면} \quad 2b=2 \quad \therefore b=1$$

$$b=1 \text{을 } \textcircled{10} \text{에 대입하면} \quad -2-c=0 \quad \therefore c=-2$$

$$b=1, c=-2 \text{를 } \textcircled{7} \text{에 대입하면} \quad a-1=0 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=1^2+1^2+(-2)^2=6$$

002

주어진 연립방정식에서 $\textcircled{7} + \textcircled{8} + \textcircled{9}$ 을 하면

$$(a+2)x + (a+2)y + (a+2)z = 3$$

$$\therefore (a+2)(x+y+z) = 3$$

- (i) $a=-2$ 일 때

$$0 \cdot (x+y+z) = 3 \text{이 되어 해가 없다.}$$

$$\therefore a=-2$$

$$(ii) a \neq -2 \text{일 때, } x+y+z = \frac{3}{a+2} \quad \cdots \textcircled{12}$$

$$\textcircled{7} - \textcircled{12} \text{을 하면} \quad (a-1)x = 1 - \frac{3}{a+2}$$

이때 $a=1$ 이면 $0 \cdot x = 0$ 이 되어 해가 무수히 많다.

$$\therefore \beta=1$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \beta - a = 1 - (-2) = 3$$

003

두 이차식이 인수분해되지 않고, 이차항을 소거해도 한 문자에 대한 간단한 식으로 정리할 수 없으므로 상수항을 소거한다.

$$\textcircled{7} - \textcircled{8} \times 3 \text{을 하면} \quad 10x^2 - 3xy - y^2 = 0$$

$$(5x+y)(2x-y) = 0$$

$$\therefore y = -5x \text{ 또는 } y = 2x$$

- (i) $y = -5x$ 를 $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$2x^2 + x \cdot (-5x) = -2, -3x^2 = -2$$

$$x^2 = \frac{2}{3} \quad \therefore x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}, y = \mp \frac{5\sqrt{6}}{3} \text{(복부호동순)}$$

- (ii) $y = 2x$ 를 $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$2x^2 + x \cdot 2x = -2, 4x^2 = -2 \quad \therefore x^2 = -\frac{1}{2}$$

그런데 $x^2 = -\frac{1}{2}$ 을 만족하는 실수는 존재하지 않으므로

해가 없다.

- (i), (ii)에서

$$a = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}, \beta = \mp \frac{5\sqrt{6}}{3} \text{(복부호동순)}$$

$$\text{또는 } a = \mp \frac{5\sqrt{6}}{3}, \beta = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \text{(복부호동순)}$$

$$\therefore 9a\beta = 9 \times \left(\pm \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \times \left(\mp \frac{5\sqrt{6}}{3} \right) = -30$$

004

㉠에서 $y=k-2x$ 를 ㉡에 대입하면

$$x^2 + (k-2x)^2 = 5, \quad x^2 + 4x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0$$

$$\therefore 5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

이때 오직 한 쌍의 해를 가지려면 ㉡이 중근을 가져야 하므로

$$D=0 \Rightarrow \frac{D}{4} = (-2k)^2 - 5(k^2 - 5) = 0, \quad -k^2 + 25 = 0$$

$$k^2 = 25 \quad \therefore k = \pm 5$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 5$

005

주어진 방정식의 양변에 xy 를 곱하면

$$5 + y + x = xy \quad \therefore xy - x - y - 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

정수 조건이 주어졌으므로 ㉠을 (일차식) $\times$ (일차식) = (정수)의 꼴로 변형하면

$$xy - x - y + 1 = 6 \quad \therefore (x-1)(y-1) = 6$$

그런데 x, y 가 양의 정수이므로

$$x-1, y-1 \text{은 정수}$$

$$x-1 \geq 0, y-1 \geq 0$$

이때 $x-1, y-1$ 을 곱해서 6이 되는 경우는

$$(x-1, y-1) = (1, 6), (6, 1), (2, 3), (3, 2)$$

$$\therefore (x, y) = (2, 7), (7, 2), (3, 4), (4, 3)$$

따라서 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는 모두 4개이다.

006

두 삼차방정식의 공통근을 a 라 하면

$$\begin{cases} a^3 + pa^2 + qa + 2 = 0 & \dots\dots \textcircled{A} \\ a^3 + qa^2 + pa + 2 = 0 & \dots\dots \textcircled{B} \end{cases}$$

㉠-㉡을 하면

$$(p-q)a^2 + (q-p)a = 0, \quad (p-q)a(a-1) = 0$$

$$\therefore p=q \text{ 또는 } a=0 \text{ 또는 } a=1$$

(i) $p=q$ 일 때, 두 삼차방정식이 일치하므로 삼차방정식의 근의 개수만큼 공통근을 가지므로 모순이다.

(ii) $a=0$ 일 때

$$a=0 \text{을 } \textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에 각각 대입하면 } 2=0 \text{이 되어 모순이다.}$$

$$\text{따라서 } a=1 \text{이 공통근이고, 이를 } \textcircled{A} \text{에 대입하면}$$

$$1 + p + q + 2 = 0 \quad \therefore p + q = -3$$

007

두 연립방정식의 해가 일치하므로

$$2x + y = 3 \quad \dots \textcircled{A}, \quad x^2 - y^2 = -45 \quad \dots \textcircled{B}$$

의 해도 일치한다.

따라서 두 식의 공통해를 구한 후, 그 해를 주어진 식에 대입하여 a, b 의 값을 구하면 된다.

㉠에서 $y=3-2x$ 를 ㉡에 대입하면

$$x^2 - (3-2x)^2 = -45, \quad x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x-6)(x+2) = 0 \quad \therefore x=6 \text{ 또는 } x=-2$$

이를 ㉠에 대입하면 $y=-9$ 또는 $y=7$

$$\therefore \begin{cases} x=6 \\ y=-9 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-2 \\ y=7 \end{cases}$$

이를 나머지 두 식에 대입하면

$$(i) \begin{cases} x=6 \\ y=-9 \end{cases} \text{ 일 때}$$

$$a^2x^2 - y^2 = -1 \text{에서 } 36a^2 - 81 = -1$$

$$\therefore a^2 = \frac{20}{9}$$

$$x+y=b^2 \text{에서 } 6-9=b^2 \quad \therefore b^2=-3$$

그런데 이는 b 가 실수라는 조건에 모순이다.

$$(ii) \begin{cases} x=-2 \\ y=7 \end{cases} \text{ 일 때}$$

$$a^2x^2 - y^2 = -1 \text{에서 } 4a^2 - 49 = -1 \quad \therefore a^2 = 12$$

$$x+y=b^2 \text{에서 } -2+7=b^2 \quad \therefore b^2=5$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 12 + 5 = 17$$

008

주어진 방정식의 두 근을 a, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의해

$$a + \beta = 2a \quad \dots \textcircled{A}, \quad a\beta = 2a + 4 \quad \dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{B} - \textcircled{A} \text{을 하면 } a\beta - a - \beta = 4 \quad \dots \textcircled{C}$$

두 근이 모두 자연수, 즉 정수 조건이 주어졌으므로 ㉡을

(일차식) $\times$ (일차식) = (정수)의 꼴로 변형하면

$$a\beta - a - \beta + 1 = 5, \quad a(\beta-1) - (\beta-1) = 5$$

$$\therefore (a-1)(\beta-1) = 5$$

그런데 a, β 는 자연수이므로

$$a-1, \beta-1 \text{는 정수}$$

이때 $a-1 \geq 0, \beta-1 \geq 0$ 이므로 $a-1, \beta-1$ 을 곱해서 5가 되는 경우는

$$a-1=1, \beta-1=5 \text{ 또는 } a-1=5, \beta-1=1$$

$$\therefore a=2, \beta=6 \text{ 또는 } a=6, \beta=2$$

$$\text{이를 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } 2+6=2a \quad \therefore a=4$$

009

가로 길이 x , 세로 길이 y 라 하면 둘레 길이와 넓이가 같으므로

$$xy = 2(x+y) \quad \therefore xy - 2x - 2y = 0$$

이 식의 양변에 4를 더하여 정리하면

$$xy - 2x - 2y + 4 = 4$$

$$x(y-2) - 2(y-2) = 4$$

$\therefore (x-2)(y-2)=4$ ㉠
 그런데 x, y 가 자연수이므로
 $x-2, y-2$ 는 정수
 $x-2 \geq -1, y-2 \geq -1$
 이때 $x-2, y-2$ 를 곱해서 4가 되는 경우는
 $(x-2, y-2)=(1, 4), (4, 1), (2, 2)$
 $\therefore (x, y)=(3, 6), (6, 3), (4, 4)$
 그런데 $x=3, y=6$ 과 $x=6, y=3$ 은 같은 사각형이므로 구
 하는 사각형은 모두 2개이다.

중단원 연습문제

pp. 176~178

001 ③	002 ③	003 ①	004 ②	005 -2
006 -14	007 3	008 ⑤	009 ③	010 4
011 ④	012 5	013 $-\frac{3}{2}$	014 $x^2-2x+1=0$	
015 10점에 7개, 9점에 8개, 8점에 5개				

001

주어진 방정식을 $Ax=B$ 의 꼴로 정리하면

$$(a^2-5a+4)x=a-2x-2$$

$$(a^2-5a+6)x=a-2$$

$$\therefore (a-2)(a-3)x=a-2$$

(i) $a \neq 2, a \neq 3$ 일 때, $x = \frac{1}{a-3}$

(ii) $a=2$ 일 때, $0 \cdot x=0$
 $\therefore$ 해가 무수히 많다.

(iii) $a=3$ 일 때, $0 \cdot x=1$
 $\therefore$ 해가 없다.

따라서 해가 존재하지 않을 때, 상수 a 의 값은
 $a=3$

002

주어진 방정식의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = -a + 2$$

$\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= a^2 - 2(-a + 2)$$

$$= a^2 + 2a - 4$$

주어진 조건에서 $\alpha^2 + \beta^2 = 11$ 이므로

$$a^2 + 2a - 4 = 11, (a+5)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -5 \text{ 또는 } a = 3$$

그런데 a 는 양수이므로 $a = 3$

003

이차식 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $f(1)=0, f(2)=3, f(3)=-2$ 를 만족하므로

$$\begin{cases} a+b+c=0 & \dots\dots \textcircled{㉠} \\ 4a+2b+c=3 & \dots\dots \textcircled{㉡} \\ 9a+3b+c=-2 & \dots\dots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉠}$ 을 하면 $3a+b=3$ ㉣

$\textcircled{㉢} - \textcircled{㉡}$ 을 하면 $5a+b=-5$ ㉤

$\textcircled{㉣} - \textcircled{㉤}$ 을 하면 $2a = -8 \therefore a = -4$

이를 ㉣, ㉤에 차례로 대입하면 $b=15, c=-11$

$$\therefore f(x) = -4x^2 + 15x - 11$$

$$\therefore f(-1) = -4 - 15 - 11 = -30$$

004

주어진 이차방정식이 중근을 가질 조건은

$$D=0 \Rightarrow \frac{D}{4} = (k+a)^2 - a^2 - (k^2-k)b = 0$$

$$k^2 + 2ak + a^2 - a^2 - bk^2 + bk = 0$$

$$\therefore (1-b)k^2 + (2a+b)k = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면 항등식의 성질에

의해 $1-b=0, 2a+b=0 \therefore b=1, a=-\frac{1}{2}$

$$\therefore a+b = \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2}$$

005

ω 가 $x^2+x+1=0$ 의 한 근이므로

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0 \therefore \omega + 1 = -\omega^2, \omega^2 + 1 = -\omega \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또, $x^2+x+1=0$ 의 양변에 $x-1$ 을 곱하면

$$(x-1)(x^2+x+1)=0 \therefore x^3-1=0$$

따라서 ω 는 $x^3-1=0$ 의 한 근이므로 $\omega^3=1 \dots\dots \textcircled{㉡}$

$$\therefore \frac{\omega^{2009}}{1+\omega^{2008}} + \frac{\omega^{2008}}{1+\omega^{2009}}$$

$$= \frac{(\omega^3)^{669} \cdot \omega^2}{1+(\omega^3)^{669} \cdot \omega} + \frac{(\omega^3)^{669} \cdot \omega}{1+(\omega^3)^{669} \cdot \omega^2}$$

$$= \frac{\omega^2}{1+\omega} + \frac{\omega}{1+\omega^2} (\because \textcircled{㉠}) = \frac{\omega^2}{-\omega^2} + \frac{\omega}{-\omega} (\because \textcircled{㉡})$$

$$= -1 - 1 = -2$$

006

주어진 삼차방정식의 한 근이 $2+\sqrt{2}i$ 이고, a, b 가 실수이므로 이 삼차방정식의 또 다른 허근은 $2-\sqrt{2}i$ 이다.

이때 나머지 한 실근을 α 라 하면 근과 계수의 관계에 의해 세 근의 합이 $-a$ 이므로

$$(2+\sqrt{2}i) + (2-\sqrt{2}i) + \alpha = -a$$

$$\therefore 4+a=-a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

세 근 중에서 두 근끼리의 곱의 합은 b이므로

$$(2+\sqrt{2}i)(2-\sqrt{2}i)+(2+\sqrt{2}i)a+a(2-\sqrt{2}i)=b$$

$$\therefore 6+4a=b \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

세 근의 곱은 -3이므로

$$(2+\sqrt{2}i)(2-\sqrt{2}i)a=-3, \quad 6a=-3$$

$$\therefore a=-\frac{1}{2}$$

$a=-\frac{1}{2}$ 을 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에 대입하면

$$a=-\frac{1}{2}, \quad b=4 \quad \therefore ab=-14$$

007

α, β, γ 가 삼차방정식 $f(x)=0$ 의 세 근이므로

$$f(\alpha)=0, \quad f(\beta)=0, \quad f(\gamma)=0$$

또한, 삼차방정식 $f(2x+3)=0$ 의 세 근을 x_1, x_2, x_3 라 하면

$$f(2x_1+3)=0, \quad f(2x_2+3)=0, \quad f(2x_3+3)=0$$

$$\therefore 2x_1+3=\alpha, \quad 2x_2+3=\beta, \quad 2x_3+3=\gamma$$

$$\therefore x_1=\frac{\alpha-3}{2}, \quad x_2=\frac{\beta-3}{2}, \quad x_3=\frac{\gamma-3}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore x_1+x_2+x_3 &= \frac{\alpha-3}{2} + \frac{\beta-3}{2} + \frac{\gamma-3}{2} \\ &= \frac{(\alpha+\beta+\gamma)-9}{2} = \frac{15-9}{2} = 3 \end{aligned}$$

008

x, y 를 두 근으로 하고 t^2 의 계수가 1인 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2-(x+y)t+xy=0$$

$$\therefore t^2+2(a-1)t+a^2-3=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

x, y 는 이차방정식 $\textcircled{7}$ 의 두 근이므로 이 이차방정식이 실근을 가지면 주어진 연립방정식이 실수해를 가지므로

$$D \geq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = (a-1)^2 - a^2 + 3 \geq 0$$

$$-2a+4 \geq 0 \quad \therefore a \leq 2$$

따라서 a 의 값으로 적당하지 않은 것은 $\textcircled{5}$ 3이다.

009

주어진 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건은

$$D > 0 \Rightarrow D = a^2 - 4 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또한, 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = a \quad \dots \textcircled{8}, \quad \alpha\beta = 1 \quad \dots \textcircled{9}$$

$\therefore \textcircled{8}$ 에서 α, β 는 서로 같은 부호이므로

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| (\because \text{참})$$

$\therefore \textcircled{7}, \textcircled{9}$ 에서

$$a^2 - 4 = (\alpha + \beta)^2 - 4 > 0, \quad a^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4 > 0$$

그런데 $\textcircled{9}$ 에서 $\alpha\beta=1$ 이므로

$$a^2 + \beta^2 - 2 > 0 \quad \therefore a^2 + \beta^2 > 2 (\because \text{거짓})$$

$\therefore \textcircled{8}$ 에서 $\beta = \frac{1}{\alpha}$ 이므로 $\alpha > 1$ 이면 $\beta < 1$ 이다. ($\therefore$ 참)

따라서 보기 중 옳은 것은 $\therefore, \textcircled{9}$ 이다.

010

방법1 실수 조건이 주어졌으므로 주어진 방정식을 x 에 대하

여 내림차순으로 정리하면

$$5x^2 - 2(2y-1)x + y^2 - 2y + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 x 는 실수이므로 방정식 $\textcircled{7}$ 은 실근을 갖는다.

$$\therefore D \geq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = (2y-1)^2 - 5(y^2 - 2y + 2) \geq 0$$

$$-y^2 + 6y - 9 \geq 0 \quad \therefore (y-3)^2 \leq 0$$

그런데 $(y-3)^2 \geq 0$ 이므로 $y=3$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$5x^2 - 10x + 5 = 0, \quad (x-1)^2 = 0 \quad \therefore x=1$$

$$\therefore x+y=1+3=4$$

방법2 주어진 방정식을 $A^2+B^2=0$ 의 꼴로 변형하면

$$4x^2 + y^2 + 1 - 4xy + 4x - 2y + x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\therefore (2x-y+1)^2 + (x-1)^2 = 0$$

그런데 x, y 는 실수이므로

$$2x-y+1=0, \quad x-1=0 \quad \therefore x=1, \quad y=3$$

$$\therefore x+y=1+3=4$$

011

두 이차방정식의 공통근을 a 라 하면

$$a^2 + 2a\alpha + b^2 = 0 \quad \dots \textcircled{7}, \quad a^2 + 2c\alpha - b^2 = 0 \quad \dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7} + \textcircled{8}$ 을 하면

$$2a^2 + 2(a+c)\alpha = 0 \quad \therefore a(a+a+c) = 0$$

그런데 $a=0$ 이면 $b^2=0$ 이 되어 b 가 삼각형의 변의 길이라는 것에 모순이므로

$$a \neq 0, \quad a+a+c=0 \quad \therefore a=-a-c$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$(-a-c)^2 + 2a(-a-c) + b^2 = 0$$

$$a^2 + 2ac + c^2 - 2a^2 - 2ac + b^2 = 0 \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

012

x, y 의 부호에 따라 다음과 같이 네 가지로 나누어 생각하자.

(i) $x \geq 0, y \geq 0$ 인 경우

$$\begin{cases} 2x-y=3 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ x^2-xy+y^2=3 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $y=2x-3$ 을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned} x^2-x(2x-3)+(2x-3)^2 &= 3 \\ 3x^2-9x+6 &= 0, (x-2)(x-1)=0 \\ \therefore x=2, y=1 \text{ 또는 } x=1, y=-1 \end{aligned}$$

그런데 $x \geq 0, y \geq 0$ 이므로 $x=2, y=1$

(ii) $x \geq 0, y < 0$ 인 경우

$$\begin{cases} 2x+y=3 & \cdots \cdots \textcircled{㉢} \\ x^2+xy+y^2=3 & \cdots \cdots \textcircled{㉣} \end{cases}$$

㉢에서 $y=3-2x$ 를 ㉣에 대입하면

$$\begin{aligned} x^2+x(3-2x)+(3-2x)^2 &= 3 \\ 3x^2-9x+6 &= 0, (x-2)(x-1)=0 \\ \therefore x=2, y=-1 \text{ 또는 } x=1, y=1 \end{aligned}$$

그런데 $x \geq 0, y < 0$ 이므로 $x=2, y=-1$

(iii) $x < 0, y \geq 0$ 인 경우

$$\begin{cases} -2x-y=3 & \cdots \cdots \textcircled{㉤} \\ x^2+xy+y^2=3 & \cdots \cdots \textcircled{㉥} \end{cases}$$

㉤에서 $y=-2x-3$ 을 ㉥에 대입하면

$$\begin{aligned} x^2+x(-2x-3)+(-2x-3)^2 &= 3 \\ 3x^2+9x+6 &= 0, (x+2)(x+1)=0 \\ \therefore x=-2, y=1 \text{ 또는 } x=-1, y=-1 \end{aligned}$$

그런데 $x < 0, y \geq 0$ 이므로 $x=-2, y=1$

(iv) $x < 0, y < 0$ 인 경우

$$\begin{cases} -2x+y=3 & \cdots \cdots \textcircled{㉦} \\ x^2-xy+y^2=3 & \cdots \cdots \textcircled{㉧} \end{cases}$$

㉦에서 $y=2x+3$ 을 ㉧에 대입하면

$$\begin{aligned} x^2-x(2x+3)+(2x+3)^2 &= 3 \\ 3x^2+9x+6 &= 0, (x+2)(x+1)=0 \\ \therefore x=-2, y=-1 \text{ 또는 } x=-1, y=1 \end{aligned}$$

그런데 $x < 0, y < 0$ 이므로 $x=-2, y=-1$

(i), (ii), (iii), (iv)에서

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= (2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1) \\ \therefore \alpha^2 + \beta^2 &= 5 \end{aligned}$$

013

$f(x)=x^3-(a^2+a+1)x+a^2+a$ 라 하면 $f(1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -a^2-a-1 & a^2+a \\ & & 1 & 1 & -a^2-a \\ \hline & 1 & 1 & -a^2-a & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= (x-1)(x^2+x-a^2-a) \\ \therefore (x-1)(x^2+x-a^2-a) &= 0 \end{aligned}$$

(i) $x=1$ 을 증근으로 가질 때

$$\begin{aligned} x=1 \text{을 } x^2+x-a^2-a=0 \text{에 대입하면} \\ -a^2-a+2=0, a^2+a-2=0 \\ (a+2)(a-1)=0 \quad \therefore a=-2 \text{ 또는 } a=1 \end{aligned}$$

(ii) $x^2+x-a^2-a=0$ 이 $x=1$ 이외의 증근을 가질 때

$$\begin{aligned} D=0 \Rightarrow D=1^2-4(-a^2-a)=0 \\ 4a^2+4a+1=0, (2a+1)^2=0 \\ \therefore a=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $a=1$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$

따라서 모든 a 의 값들의 합은

$$1+(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$$

014

이차방정식 $x^2-x+1=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이때 $\alpha+\frac{1}{\alpha}, \beta+\frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하고, x^2 의 계수가 1인 이차방정식을 $x^2-ax+b=0$ 이라 하면

(i) 두 근의 합이 a 이므로

$$\begin{aligned} a &= \alpha + \frac{1}{\alpha} + \beta + \frac{1}{\beta} \\ &= \alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \\ &= 1 + \frac{1}{1} (\because \textcircled{㉠}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

(ii) 두 근의 곱이 b 이므로

$$\begin{aligned} b &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \\ &= \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \\ &= \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\ &= \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1^2 - 2 \cdot 1}{1} (\because \textcircled{㉠}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $x^2-2x+1=0$

채점 영역	단계	채점 요소	배점 비율
문제 이해 & 해결 과정	㉠	근과 계수의 관계에서 $a+\beta$, $a\beta$ 의 값 구하기	20%
	㉡	구하는 방정식을 $x^2-ax+b=0$ 으로 놓기	20%
	㉢	a, b의 값 구하기	40%
답 구하기	㉣	이차방정식 완성하기	20%

015

10점, 9점, 8점에 맞은 화살의 개수를 각각 x, y, z라 하고, 주어진 조건을 식으로 나타내면

$$\begin{cases} x+y+z=20 & \cdots \text{㉠} \\ 10x+9y+8z=182 & \cdots \text{㉡} \\ y=x+1 & \cdots \text{㉢} \end{cases}$$

..... ㉠

㉠-㉢×8을 하면

$$2x+y=22 \quad \cdots \text{㉣}$$

㉣을 ㉢에 대입하면

$$2x+x+1=22$$

..... ㉡

$$3x=21 \quad \therefore x=7$$

x=7을 ㉢에 대입하면 y=8

x=7, y=8을 ㉠에 대입하면

$$7+8+z=20 \quad \therefore z=5$$

..... ㉢

따라서 10점에 7개, 9점에 8개, 8점에 5개가 맞았다.

..... ㉣

채점 영역	단계	채점 요소	배점 비율
문제 이해 & 해결 과정	㉠	조건에 맞는 변수를 정하고, 식 세우기	30%
	㉡	문자를 소개하여 미지수가 2개인 방정식 만들기	20%
답 구하기	㉢	미지수 x, y, z의 값 구하기	30%
	㉣	조건에 맞도록 답 말하기	20%

사고력 기르기

p. 179

001 ①

002 15

003 19문항

004 ④

001

주어진 방정식의 두 근을 α , β 라 하면 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha+\beta=p, \alpha\beta=q$$

그런데 q가 소수이면 q의 약수는 1과 q뿐이므로 α, β 는 1과 q이다.

$$\therefore p=1+q$$

따라서 q와 p는 연속한 두 정수이고 소수이므로 q, p의 값은 q=2, p=3뿐이다.

$$\therefore p+q=5$$

002

$$\begin{cases} 7x^2-3y^2+4z^2=29 & \cdots \text{㉠} \\ 5x^2-2y^2+3z^2=30 & \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠×3-㉡×2를 하면

$$x^2+z^2=32 \quad \cdots \text{㉢}$$

㉢에서 x, z는 자연수이므로 x^2, z^2 은 제곱수이다.

$$\therefore x^2=16, z^2=16 \quad \therefore x=4, z=4$$

이를 ㉡에 대입하면

$$80-2y^2+48=30, y^2=49 \quad \therefore y=7(\because y>0)$$

$$\therefore x+y+z=4+7+4=15$$

003

2점, 3점, 4점짜리 문항 수를 각각 x, y, z라 하고, 주어진 조건에 맞게 식을 세우면

$$\begin{cases} x+y+z=30 & \cdots \text{㉠} \\ 2x+3y+4z=100 & \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠-㉡×2를 하면

$$y+2z=40$$

그런데 각 배점별로 적어도 한 문항 이상이어야 하므로

$$y=40-2z \geq 1, 39 \geq 2z$$

$$\therefore z \leq 19.5$$

이때 z는 자연수이므로 최댓값은 19이다.

따라서 4점짜리의 최대 문항 수는 19문항이다.

004

정수 x를 3으로 나눈 나머지가 f(x)이고, x는 3으로 나누어 떨어지지 않으므로 f(x)는 $0 < f(x) < 3$ 인 정수이다.

이때 f(a)f(b)=f(a)+f(b)를 만족하므로

$$f(a)f(b)-f(a)-f(b)=0$$

이 식의 양변에 1을 더하면

$$f(a)f(b)-f(a)-f(b)+1=1$$

$$\therefore \{f(a)-1\}\{f(b)-1\}=1$$

$$\therefore f(a)-1=1, f(b)-1=1$$

$$\therefore f(a)=2, f(b)=2$$

즉, a, b는 3으로 나눈 나머지가 2이므로

$a=3k+2, b=3k'+2$ (k, k'은 정수)라 하면

$$\neg. a+b=3k+2+3k'+2=3(k+k')+4$$

$$\therefore f(a+b)=1(\because \text{거짓})$$

$$\neg. a-b=3k+2-(3k'+2)=3(k-k')$$

$$\therefore f(a-b)=0(\because \text{참})$$

$$\neg. ab=(3k+2)(3k'+2)=3(3kk'+2k+2k'+1)+2$$

$$\therefore f(ab)=1(\because \text{참})$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.



01 일차부등식

개념 확인 문제

p. 181

- 1 (1) $x > \frac{5}{2}$ (2) $x \geq 2$ (3) 해가 없다.
 2 (1) $-2 < x < 2$ (2) $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$
 (3) $-2 \leq x \leq -1$ 또는 $1 \leq x \leq 2$
 3 (1) 5, 15 (2) -2, 8 (3) 6, 50 (4) $\frac{3}{5}, 5$

1

- (1) $2x > 5$ 에서 $x > \frac{5}{2}$
 (2) $-3x + 6 \leq 0$ 에서
 $-3x \leq -6 \quad \therefore x \geq 2$
 (3) $2x - 5 > 2 + 2x$ 에서
 $2x - 2x > 2 + 5$
 $\therefore 0 \cdot x > 7 \Rightarrow$ 해가 없다.

2

- (1) 절댓값의 정의 「 $|x| < a \iff -a < x < a$ 」에 의하여
 $|x| < 2 \iff -2 < x < 2$
 (2) 절댓값의 정의 「 $|x| \geq a \iff x \leq -a$ 또는 $x \geq a$ 」에 의하여
 $|x| \geq 1 \iff x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$
 (3) $1 \leq |x| \leq 2$ 를 분리해서 표현하면
 $1 \leq |x|$ 이고, $|x| \leq 2$
 (i) $1 \leq |x|$ 에서 절댓값의 정의에 의하여
 $1 \leq |x| \iff x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$
 (ii) $|x| \leq 2$ 에서 절댓값의 정의에 의하여
 $|x| \leq 2 \iff -2 \leq x \leq 2$
 (i), (ii)의 공통 범위를 구하면
 $-2 \leq x \leq -1$ 또는 $1 \leq x \leq 2$

3

- (1)
$$\begin{array}{l} 3 \leq x \leq 10 \\ +) 2 \leq y \leq 5 \\ \hline 5 \leq x+y \leq 15 \end{array}$$

 (2)
$$\begin{array}{l} 3 \leq x \leq 10 \\ -) 2 \leq y \leq 5 \\ \hline -2 \leq x-y \leq 8 \end{array}$$

 (3)
$$\begin{array}{l} 3 \leq x \leq 10 \\ \times) 2 \leq y \leq 5 \\ \hline 6 \leq xy \leq 50 \end{array}$$

 (4)
$$\begin{array}{l} 3 \leq x \leq 10 \\ \div) 2 \leq y \leq 5 \\ \hline \frac{3}{5} \leq \frac{x}{y} \leq 5 \end{array}$$

유 제

pp. 182~183

- 238 (1) (i) $a > 2$ 일 때, $x > \frac{a+2}{a-2}$
 (ii) $a < 2$ 일 때, $x < \frac{a+2}{a-2}$
 (iii) $a = 2$ 일 때, 해가 없다.
 (2) (i) $a > b$ 일 때, $x \geq a+b$
 (ii) $a < b$ 일 때, $x \leq a+b$
 (iii) $a = b$ 일 때, 해는 모든 실수

239 (1) 1 (2) -2 240 $x < \frac{6}{5}$

241 (1) $-1 < x < 3$ (2) $-2 \leq x \leq 0$ 또는 $2 \leq x \leq 4$

242 (1) $x > \frac{1}{4}$ (2) $-\frac{4}{3} \leq x \leq 0$

238

(1) 주어진 부등식을 $Ax > B$ 의 꼴로 정리하면

$$(a-2)x > a+2$$

좌변의 식 $a-2$ 가 0이 되는 $a=2$ 를 기준으로 구간을 나누어 풀면

(i) $a > 2$ 일 때, $a-2 > 0 \quad \therefore x > \frac{a+2}{a-2}$

(ii) $a < 2$ 일 때, $a-2 < 0 \quad \therefore x < \frac{a+2}{a-2}$

(iii) $a = 2$ 일 때, $0 \cdot x > 4 \quad \therefore$ 해가 없다.

(2) 주어진 부등식을 $Ax \geq B$ 의 꼴로 정리하면

$$(a-b)x \geq a^2 - b^2 \quad \therefore (a-b)x \geq (a+b)(a-b)$$

좌변의 식 $a-b$ 가 0이 되는 $a=b$ 를 기준으로 구간을 나누어 풀면

(i) $a > b$ 일 때, $a-b > 0$
 $\therefore x \geq \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} \quad \therefore x \geq a+b$

(ii) $a < b$ 일 때, $a-b < 0$
 $\therefore x \leq \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} \quad \therefore x \leq a+b$

(iii) $a = b$ 일 때, $0 \cdot x \geq 0 \quad \therefore$ 해는 모든 실수

239

(1) $a^2x + 1 > x + 4a$ 를 $Ax > B$ 의 꼴로 정리하면

$$(a^2 - 1)x > 4a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

집합 P를 만족하는 원소는 주어진 일차방정식의 해이고, $n(P) = 0$ 을 만족하는 집합 P의 원소의 개수는 0개이므로 부등식 ①의 해는 존재하지 않는다.

부등식 ①의 해가 존재하지 않을 조건은

$$a^2 - 1 = 0, 4a - 1 \geq 0 \quad \therefore a = \pm 1, a \geq \frac{1}{4}$$

따라서 이를 동시에 만족하는 a의 값은 $a = 1$

(2) $a^2x-3 \geq 4x+2a$ 를 $Ax \geq B$ 의 꼴로 정리하면

$$(a^2-4)x \geq 2a+3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

주어진 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로 부등식 $\textcircled{7}$ 의 해는 모든 실수이다.

부등식 $\textcircled{7}$ 의 해가 모든 실수일 조건은

$$a^2-4=0, 2a+3 \leq 0 \quad \therefore a=\pm 2, a \leq -\frac{3}{2}$$

따라서 이를 동시에 만족하는 a 의 값은 $a=-2$

240

$ax+b < 0$ 을 $Ax < B$ 의 꼴로 정리하면

$$ax < -b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$\textcircled{7}$ 과 그 해인 $x > -5$ 의 부등호의 방향이 다르므로

$$a < 0$$

이때 $\textcircled{7}$ 의 해는 $x > -\frac{b}{a}$

주어진 조건에서 부등식의 해는 $x > -5$ 이므로

$$-\frac{b}{a} = -5 \quad \therefore b = 5a \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8}$ 을 부등식 $bx-a > b$ 에 대입하면

$$5ax-a > 5a \quad \therefore 5ax > 6a$$

그런데 $a < 0$ 이므로 구하는 부등식의 해는 $x < \frac{6}{5}$

241

(1) **방법1** 절댓값 기호 안의 식 $1-x$ 가 0이 되는 $x=1$ 을 기준으로 구간을 나누어 풀면

(i) $x < 1$ 일 때, $1-x < 2$

$$\therefore x > -1$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $-1 < x < 1$

(ii) $x \geq 1$ 일 때, $-(1-x) < 2 \quad \therefore x < 3$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $1 \leq x < 3$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $-1 < x < 3$

방법2 절댓값의 정의에 의하여

$$|1-x| < 2 \iff -2 < 1-x < 2$$

$$-3 < -x < 1 \quad \therefore -1 < x < 3$$

(2) **방법1** 절댓값 기호 안의 식 $x-1$ 이 0이 되는 $x=1$ 을 기준으로 구간을 나누어 풀면

(i) $x < 1$ 일 때, $1-(x-1) \leq 3$

$$-3 \leq x-1 \leq -1 \quad \therefore -2 \leq x \leq 0$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $-2 \leq x \leq 0$

(ii) $x \geq 1$ 일 때, $1 \leq x-1 \leq 3 \quad \therefore 2 \leq x \leq 4$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $2 \leq x \leq 4$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $-2 \leq x \leq 0$ 또는 $2 \leq x \leq 4$

방법2 $1 \leq |x-1| \leq 3$ 을 분리해서 표현하면

$$1 \leq |x-1| \text{이고, } |x-1| \leq 3$$

(i) $1 \leq |x-1|$ 에서 절댓값의 정의에 의하여

$$1 \leq |x-1| \iff x-1 \leq -1 \text{ 또는 } x-1 \geq 1$$

$$\iff x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 2$$

(ii) $|x-1| \leq 3$ 에서 절댓값의 정의에 의하여

$$|x-1| \leq 3 \iff -3 \leq x-1 \leq 3$$

$$\iff -2 \leq x \leq 4$$

(i), (ii)에서 공통 범위는 $-2 \leq x \leq 0$ 또는 $2 \leq x \leq 4$

242

(1) 절댓값 기호 안의 식 $x-3$ 이 0이 되는 $x=3$ 을 기준으로 구간을 나누어 풀면

(i) $x < 3$ 일 때, $-2(x-3) < 2x+5 \quad \therefore x > \frac{1}{4}$

그런데 $x < 3$ 이므로 $\frac{1}{4} < x < 3$

(ii) $x \geq 3$ 일 때, $2(x-3) < 2x+5$

그런데 이는 $-6 < 5$ 이므로 $x \geq 3$ 에서 항상 성립한다.

(i), (ii)에서 구하는 해는 $x > \frac{1}{4}$

(2) 절댓값 기호 안의 식 $x-3$, $x+1$ 이 0이 되는 $x=-1$, $x=3$ 을 기준으로 구간을 나누어 풀면

(i) $x < -1$ 일 때, $-(x-3)-2(x+1) \leq 5$

$$-3x \leq 4 \quad \therefore x \geq -\frac{4}{3}$$

그런데 $x < -1$ 이므로 $-\frac{4}{3} \leq x < -1$

(ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때, $-(x-3)+2(x+1) \leq 5$

$$\therefore x \leq 0$$

그런데 $-1 \leq x < 3$ 이므로 $-1 \leq x \leq 0$

(iii) $x \geq 3$ 일 때, $(x-3)+2(x+1) \leq 5 \quad \therefore x \leq 2$

그런데 $x \geq 3$ 이므로 해가 없다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 해는 $-\frac{4}{3} \leq x \leq 0$

유 제

pp. 186~192

243 (1) $x < -\frac{3}{2}$ 또는 $x > \frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$

(3) $2-\sqrt{3} \leq x \leq 2+\sqrt{3}$ (4) $\frac{1-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

244 (1) $-2 \leq x \leq 2$ (2) $x < -3$ 또는 $x > 5$

245 $1 \leq a \leq 2$ **246** (1) $x=2$ (2) 해가 없다.

(3) 모든 실수 (4) 해가 없다.

247 ①	248 16	249 -10	250 2
251 $4 < x < 6$		252 ④	253 ④
254 (1) $-3 \leq x < -1$	(2) $2 < x < 6$		
255 (1) $-2 \leq x < -1$ 또는 $3 < x \leq 4$			
	(2) $-8 < x < -7$ 또는 $5 < x < 12$		
256 2	257 6	258 $\{x 1 < x \leq 3\}$	
259 1, 2	260 20만 원	024 7	

243

- (1) $4x^2 + 4x - 3 = 0$ 으로 놓고, 판별식 D를 구하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 4 \cdot (-3) = 16 > 0$$

$D > 0$ 이므로 주어진 부등식의 좌변을 인수분해하여 풀면

$$(2x-1)(2x+3) > 0 \quad \therefore x < -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x > \frac{1}{2}$$

- (2) 주어진 부등식을 정리하면

$$6x^2 - x - 1 \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$6x^2 - x - 1 = 0$ 으로 놓고, 판별식 D를 구하면

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 25 > 0$$

$D > 0$ 이므로 ①의 좌변을 인수분해하여 풀면

$$(2x-1)(3x+1) \leq 0 \quad \therefore -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

- (3) 주어진 부등식을 정리하면

$$x^2 - 4x + 1 \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2 - 4x + 1 = 0$ 으로 놓고, 판별식 D를 구하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$$

$D > 0$ 이므로 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 에서 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 1}}{1} = 2 \pm \sqrt{3}$$

①의 좌변을 인수분해하여 풀면

$$\{x - (2 - \sqrt{3})\} \{x - (2 + \sqrt{3})\} \leq 0$$

$$\therefore 2 - \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3}$$

- (4) 주어진 부등식을 정리하면

$$2x^2 - 2x - 1 < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$2x^2 - 2x - 1 = 0$ 으로 놓고, 판별식 D를 구하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 3 > 0$$

$D > 0$ 이므로 $2x^2 - 2x - 1 = 0$ 에서 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 2 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

①의 좌변을 인수분해하여 풀면

$$\left(x - \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) < 0$$

$$\therefore \frac{1 - \sqrt{3}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

244

- (1) 절댓값 기호 안의 식 x 가 0이 되는 $x=0$ 을 기준으로 구간을 나누어 풀면

$$(i) x < 0 \text{ 일 때, } x^2 + x - 2 \leq 0$$

$$(x+2)(x-1) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq x \leq 1$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $-2 \leq x < 0$

$$(ii) x \geq 0 \text{ 일 때, } x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$(x-2)(x+1) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 2$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $0 \leq x \leq 2$

$$(i), (ii) \text{에서 구하는 해는 } -2 \leq x \leq 2$$

- (2) 절댓값 기호 안의 식 $x-1$ 이 0이 되는 $x=1$ 을 기준으로 구간을 나누어 풀면

$$(i) x < 1 \text{ 일 때, } x^2 - 2x - 3 > -3(x-1)$$

$$(x-2)(x+3) > 0 \quad \therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 2$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x < -3$

$$(ii) x \geq 1 \text{ 일 때, } x^2 - 2x - 3 > 3(x-1)$$

$$x(x-5) > 0 \quad \therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 5$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x > 5$

$$(i), (ii) \text{에서 구하는 해는 } x < -3 \text{ 또는 } x > 5$$

245

$x^2 - 5x + 6 < 0$ 의 좌변을 인수분해하여 풀면

$$(x-2)(x-3) < 0 \quad \therefore 2 < x < 3$$

$$\therefore A = \{x | 2 < x < 3\}$$

$x^2 - 4ax + 3a^2 < 0$ 의 좌변을 인수분해하여 풀면

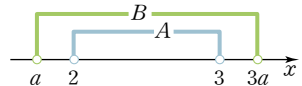
$$(x-a)(x-3a) < 0 \quad \therefore a < x < 3a \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore B = \{x | a < x < 3a\}$$

$A \subset B$ 를 만족하도록 수직

선에 나타내면 오른쪽 그림

과 같다.



$$\therefore a \leq 2, 3a \geq 3 \quad \therefore 1 \leq a \leq 2$$

246

- (1) $x^2 - 4x + 4 = 0$ 으로 놓고, 판별식 D를 구하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 1 \cdot 4 = 0$$

$D = 0$ 이므로 주어진 부등식의 좌변을 완전제곱꼴로 변형하면 $(x-2)^2 \leq 0$

그런데 $(x-2)^2 \geq 0$ 이므로 $(x-2)^2 \leq 0$ 을 만족하는 것은 $x=2$ 뿐이다.

- (2) 주어진 부등식을 정리하면

$$x^2 - 10x + 25 < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2 - 10x + 25 = 0$ 으로 놓고, 판별식 D를 구하면

$$\frac{D}{4} = (-5)^2 - 1 \cdot 25 = 0$$

$D=0$ 이므로 ㉠의 좌변을 완전제곱꼴로 변형하면

$$(x-5)^2 < 0$$

그런데 $(x-5)^2 \geq 0$ 이므로 $(x-5)^2 < 0$ 을 만족하는 해가 없다.

- (3) $2x^2+3x+2=0$ 으로 놓고, 판별식 D 를 구하면

$$D=3^2-4 \cdot 2 \cdot 2=-7 < 0$$

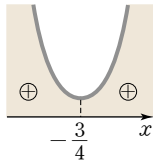
$D < 0$ 이므로 주어진 부등식의 좌변을 완전제곱꼴로 변형

$$\text{하면 } 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8} \geq 0$$

그런데 모든 실수 x 에 대하여

$$2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8} > 0 \text{이므로 해는 모}$$

든 실수이다.



- (4) 주어진 부등식을 정리하면

$$x^2-5x+7 < 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$x^2-5x+7=0$ 으로 놓고, 판별식 D 를 구하면

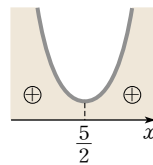
$$D=(-5)^2-4 \cdot 7=-3 < 0$$

$D < 0$ 이므로 ㉠의 좌변을 완전제곱꼴로 변형하면

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4} < 0$$

그런데 모든 실수 x 에 대하여

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0 \text{이므로 해가 없다.}$$



247

- (i) 집합 A 에서 $x^2-3x+3=0$ 으로 놓고, 판별식 D 를 구하면

$$D=(-3)^2-4 \cdot 3=-3 < 0$$

$D < 0$ 이므로 $x^2-3x+3 < 0$ 의 좌변을 완전제곱꼴로 변형

$$\text{하면 } \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4} < 0$$

그런데 모든 실수 x 에 대하여 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0$ 이므로

해가 없다. $\therefore A=\emptyset$

- (ii) 집합 B 에서 $9x^2+6x+1=0$ 으로 놓고, 판별식 D 를 구

$$\text{하면 } \frac{D}{4}=3^2-9 \cdot 1=0$$

$D=0$ 이므로 $9x^2+6x+1 \leq 0$ 의 좌변을 완전제곱꼴로 변

$$\text{형하면 } (3x+1)^2 \leq 0$$

그런데 모든 실수 x 에 대하여 $(3x+1)^2 \geq 0$ 이므로

$(3x+1)^2 \leq 0$ 을 만족하는 것은 $x=-\frac{1}{3}$ 뿐이다.

$$\therefore B=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

- (iii) 집합 C 에서 $2x^2-5x+4=0$ 으로 놓고, 판별식 D 를 구

$$\text{하면 } D=(-5)^2-4 \cdot 2 \cdot 4=-7 < 0$$

$D < 0$ 이므로 $2x^2-5x+4 > 0$ 의 좌변을 완전제곱꼴로 변

$$\text{형하면 } 2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{7}{8} > 0$$

그런데 모든 실수 x 에 대하여 $2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{7}{8} > 0$ 이므로

해는 모든 실수이다.

$\therefore C=\mathbb{R}$ (단, $\mathbb{R}$ 는 실수 전체의 집합)

(i), (ii), (iii)에서 $A \subset B \subset C$

248

이차부등식의 해가 오직 하나인 경우는 $(ax+b)^2 \leq 0$ 의 꼴일 때이므로 부등식의 좌변이 완전제곱꼴이다.

주어진 부등식에서 $4x^2-kx+k=0$ 이라 하면 이 식이 완전 제곱꼴이 될 조건은

$$D=0 \Rightarrow D=(-k)^2-4 \cdot 4 \cdot k=0, k(k-16)=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=16$$

따라서 구하는 모든 k 의 값들의 합은 $0+16=16$

249

이차항의 계수가 1이고, 해가 $x < -\frac{1}{3}$ 또는 $x > \frac{1}{2}$ 인 이차

$$\text{부등식은 } \left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) > 0$$

$$\therefore x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6} > 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

그런데 주어진 부등식 $ax^2+bx+2 < 0$ 은 ㉠과 부등호의 방향이 다르므로 $a < 0$

㉠의 양변에 a 를 곱하면

$$ax^2-\frac{a}{6}x-\frac{a}{6} < 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

주어진 부등식과 ㉡의 계수를 비교하면

$$b=-\frac{a}{6}, 2=-\frac{a}{6} \quad \therefore a=-12$$

$a=-12$ 를 $b=-\frac{a}{6}$ 에 대입하면 $b=2$

$$\therefore a+b=-10$$

250

이차항의 계수가 1이고, 해가 $1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$ 인 이차부 등식은 $\{x-(1-\sqrt{2})\}\{x-(1+\sqrt{2})\} < 0$

$$\therefore x^2-2x-1 < 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

그런데 주어진 부등식 $ax^2+bx+a^2-2 > 0$ 은 ㉠과 부등호의 방향이 다르므로 $a < 0$

㉠의 양변에 a 를 곱하면

$$ax^2-2ax-a > 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

주어진 부등식과 ㉡의 계수를 비교하면

$$b = -2a, a^2 - 2 = -a \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{C}$ 에서 $a^2 + a - 2 = 0$
 $(a+2)(a-1) = 0 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 1$
 그런데 $a < 0$ 이므로 $a = -2$
 $a = -2$ 를 $b = -2a$ 에 대입하면 $b = 4$
 $\therefore a + b = 2$

251

이차항의 계수가 1이고, 해가 $\frac{1}{12} \leq x \leq \frac{1}{8}$ 인 이차부등식은

$$\left(x - \frac{1}{12}\right)\left(x - \frac{1}{8}\right) \leq 0$$

$$x^2 - \frac{5}{24}x + \frac{1}{96} \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

그런데 주어진 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 은 $\textcircled{A}$ 와 부등호의 방향이 다르므로 $a < 0$

$\textcircled{A}$ 의 양변에 a 를 곱하면

$$ax^2 - \frac{5}{24}ax + \frac{a}{96} \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

주어진 부등식과 $\textcircled{B}$ 의 계수를 비교하면

$$b = -\frac{5}{24}a, c = \frac{a}{96} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

부등식 $4cx^2 + 2bx + a > 0$ 에 $\textcircled{C}$ 을 대입하면

$$\frac{a}{24}x^2 - \frac{5}{12}ax + a > 0$$

양변을 $\frac{a}{24}$ 로 나누면 $x^2 - 10x + 24 < 0 \quad (\because \frac{a}{24} < 0)$

$$(x-4)(x-6) < 0 \quad \therefore 4 < x < 6$$

252

이차항의 계수가 양수이므로 주어진 부등식이 항상 성립할 조건은 $x^2 + 2ax - a + 12 = 0$ 에서

$$D \leq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = a^2 - (-a + 12) \leq 0, a^2 + a - 12 \leq 0$$

$$(a+4)(a-3) \leq 0 \quad \therefore -4 \leq a \leq 3$$

253

주어진 부등식을 정리하면

$$(k-2)x^2 + 2(k-2)x + 4 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$k-2=0$, $k-2 \neq 0$ 일 수도 있으므로 $k=2$, $k \neq 2$ 일 때로 나누어 생각한다.

(i) $k=2$ 일 때

$$k=2 \text{를 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } 0 \cdot x^2 + 2 \cdot 0 \cdot x + 4 > 0$$

따라서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k \neq 2$ 일 때

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립할 조건은 $(k-2)x^2 + 2(k-2)x + 4 = 0$ 에서

$$\neg, (\text{이차항의 계수}) > 0 \quad \neg, D < 0$$

$$\neg, (\text{이차항의 계수}) > 0 \Rightarrow k-2 > 0 \quad \therefore k > 2$$

$$\neg, D < 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = (k-2)^2 - 4(k-2) < 0$$

$$k^2 - 8k + 12 < 0, (k-2)(k-6) < 0$$

$$\therefore 2 < k < 6$$

$$\neg, \neg \text{의 공통 범위를 구하면 } 2 < k < 6$$

(i), (ii)에서 k 의 값의 범위는 $2 \leq k < 6$

254

(1) $\textcircled{A}$ 을 풀면

$$(x+3)(x-1) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq x \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{B} \text{을 풀면 } (x-9)(x+1) > 0$$

$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 9 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}$, $\textcircled{C}$ 을 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 해는 $\textcircled{B}$, $\textcircled{C}$ 의 공통 부분이므로

$$-3 \leq x < -1$$

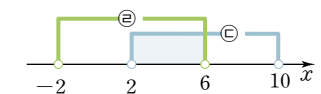
(2) $\textcircled{A}$ 을 풀면 $x^2 - 12x + 20 < 0$

$$(x-2)(x-10) < 0 \quad \therefore 2 < x < 10 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$\textcircled{D}$ 을 풀면

$$(x+2)(x-6) < 0 \quad \therefore -2 < x < 6 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

$\textcircled{D}$, $\textcircled{E}$ 을 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 해는 $\textcircled{D}$, $\textcircled{E}$ 의 공통 부분이므로

$$2 < x < 6$$

255

(1) 주어진 부등식을 분리해서 나타내면

$$\begin{cases} 3+x < x^2-x & \dots\dots \textcircled{A} \\ x^2-x \leq 8+x & \dots\dots \textcircled{B} \end{cases}$$

$$\textcircled{A} \text{을 풀면 } x^2 - 2x - 3 > 0, (x-3)(x+1) > 0$$

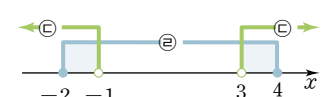
$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}$ 을 풀면

$$x^2 - 2x - 8 \leq 0, (x-4)(x+2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$\textcircled{C}$, $\textcircled{D}$ 을 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 해는 $\textcircled{C}$, $\textcircled{D}$ 의 공통 부분이므로

$$-2 \leq x < -1 \text{ 또는 } 3 < x \leq 4$$

(2) ㉠을 풀면 $(x-5)(x+7) > 0$

$\therefore x < -7$ 또는 $x > 5$ ㉡

㉠에서 절댓값 기호 안의 식 $x-2$ 가 0이 되는 $x=2$ 를 기준으로 구간을 나누어 풀면

(i) $x < 2$ 일 때, $-(x-2) < 10 \quad \therefore x > -8$

그런데 $x < 2$ 이므로 $-8 < x < 2$

(ii) $x \geq 2$ 일 때, $x-2 < 10 \quad \therefore x < 12$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $2 \leq x < 12$

(i), (ii)에서 $-8 < x < 12$ ㉢

㉡, ㉢을 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 해는 ㉡, ㉢의 공통 부분이므로

$-8 < x < -7$ 또는 $5 < x < 12$

256

$x^2 + (2-a)x - 2a \geq 0$ 을 풀면 $(x+2)(x-a) \geq 0$

$\therefore x \leq -2, x \geq a$ 또는 $x \leq a, x \geq -2$ ㉠

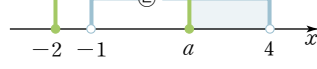
$x^2 - 3x - 4 < 0$ 을 풀면

$(x-4)(x+1) < 0 \quad \therefore -1 < x < 4$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위가

$2 \leq x < 4$ 가 되도록 ㉠, ㉡

을 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 ㉠, ㉡의 공통 범위는 $a \leq x < 4$ 이므로 $a = 2$

257

집합 $A = \{x | x^2 - 6x + 8 \leq 0\}$ 에서

$x^2 - 6x + 8 \leq 0, (x-2)(x-4) \leq 0$

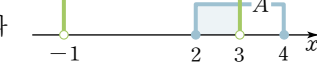
$\therefore 2 \leq x \leq 4 \Rightarrow A = \{x | 2 \leq x \leq 4\}$

집합 $B = \{x | x^2 + ax + b < 0\}$ 에서 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$x^2 + ax + b < 0 \Leftrightarrow (x-\alpha)(x-\beta) < 0$

$\therefore \alpha < x < \beta \Rightarrow B = \{x | \alpha < x < \beta\}$

이때 $A \cap B = \{x | 2 \leq x < 3\}$, $A \cup B = \{x | -1 < x \leq 4\}$ 를 만족하도록 두 집합을 수직선에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore B = \{x | -1 < x < 3\} \Rightarrow -1 < x < 3$

이차항의 계수가 1이고, 해가 $-1 < x < 3$ 인 이차부등식은

$(x+1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$

$\Leftrightarrow x^2 + ax + b < 0$

두 부등식의 계수를 비교하면

$a = -2, b = -3 \quad \therefore ab = 6$

258

집합 A에서 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$A = \{x | x^2 + ax + b \leq 0\} = \{x | \alpha \leq x \leq \beta\}$

집합 B에서 $x^2 + x + a = 0$ 의 두 근을 $\gamma, \delta (\gamma < \delta)$ 라 하면

$B = \{x | x^2 + x + a > 0\} = \{x | x < \gamma \text{ 또는 } x > \delta\}$

이때 $A \cup B = \{x | x < -2 \text{ 또는 } x \geq -1\}$ 을 만족하도록 두 집합을 수직선에 나타내면



오른쪽 그림과 같다.

한편, 오른쪽 그림에서

$x^2 + x + a = 0$ 은 $-2, \delta$ 를 두 근으로 가지므로 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합은

$-2 + \delta = -1 \quad \therefore \delta = 1$

또한, 두 근의 곱은 $(-2) \cdot \delta = a$

이 식에 $\delta = 1$ 을 대입하면 $(-2) \cdot 1 = a \quad \therefore a = -2$

또한, 위의 그림에서 $x^2 + ax + b = 0$ 은 $-1, \beta$ 를 두 근으로

가지므로 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합은

$-1 + \beta = -a$

이 식에 $a = -2$ 를 대입하면 $\beta = 3$

따라서 위의 그림에서 $A \cap B = \{x | \delta < x \leq \beta\}$ 이므로

$A \cap B = \{x | 1 < x \leq 3\}$

259

두 변의 길이를 x m씩 각각 늘이고 줄이면 두 변의 길이는

$(2+x)m, (5-x)m$

이때 대각선의 길이가 $5m$ 이하이므로

$\sqrt{(2+x)^2 + (5-x)^2} \leq 5$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$(2+x)^2 + (5-x)^2 \leq 25, 2x^2 - 6x + 4 \leq 0$

$(x-1)(x-2) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq x \leq 2$

따라서 x 의 최솟값은 1, 최댓값은 2이다.

260

입장권 한 장의 가격을 x 만 원 인상하면

(입장권의 가격) $= 10 + x$ (만 원)

(관람객의 수) $= 50 - 2x$ (명)

총 판매액이 600만 원 이상이 되어야 하므로

$(10+x)(50-2x) \geq 600, 2x^2 - 30x + 100 \leq 0$

$(x-5)(x-10) \leq 0 \quad \therefore 5 \leq x \leq 10$

따라서 인상 가격의 최댓값은 10만 원이므로 입장권의 최대 가격은 20만 원이다.

261

퀵서비스와 택배 중에서 택배를 이용하는 것이 유리한 경우는

$x + 14 \leq x^2 + 2x + 2$

..... ㉠

우편과 택배 중에서 택배를 이용하는 것이 유리한 경우는

$$x+14 \leq \frac{1}{2}x+16 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

①을 풀면 $x^2+x-12 \geq 0$, $(x+4)(x-3) \geq 0$
 $\therefore x \leq -4$ 또는 $x \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$

②를 풀면 $\frac{1}{2}x \leq 2 \quad \therefore x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$

그런데 x 는 거리이므로 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$

②, ③, ④의 공통 범위는 $3 \leq x \leq 4$
 $\therefore a=3, b=4 \quad \therefore a+b=7$

소단원 연습문제

pp. 193~194

001 ㄱ, ㄴ	002 ⑤	003 ㄱ, ㄷ	004 ①
005 $-1 < k < 0$	006 ①	007 ②	
008 $a=-1, b=-2$	009 ④	010 10	

001

주어진 부등식을 $Ax \leq B$ 의 꼴로 정리하면

$$a(a-1)x \leq a-1$$

ㄱ. $a < 0$ 이면 $a(a-1) > 0$ 이므로 $x \leq \frac{1}{a}$ ($\therefore$ 참)

ㄴ. $a=1$ 이면 $0 \cdot x \leq 0$ 이므로 해는 실수 전체의 집합 ($\therefore$ 참)

ㄷ. $a > 1$ 이면 $a(a-1) > 0$ 이므로 $x \leq \frac{1}{a}$ ($\therefore$ 거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

002

$|x-a| \leq 3$ 을 절댓값의 정의를 이용하여 풀면

$$-3 \leq x-a \leq 3 \quad \therefore a-3 \leq x \leq a+3$$

그런데 주어진 해가 $-1 \leq x \leq b$ 이므로

$$a-3=-1, a+3=b$$

$$\therefore a=2, b=5 \quad \therefore a+b=7$$

003

ㄱ. $2x^2-6x+5=0$ 이라 하고, 판별식 D 를 구하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 2 \cdot 5 = -1 < 0$$

$D < 0$ 이므로 주어진 부등식의 좌변을 완전제곱꼴로 변형

$$\text{하면 } 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} < 0$$

$$\text{그런데 모든 실수 } x \text{에 대하여 } 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0 \text{이므로}$$

해가 없다.

ㄴ. $4x^2+4x+1=0$ 이라 하고, 판별식 D 를 구하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 4 \cdot 1 = 0$$

$D=0$ 이므로 주어진 부등식의 좌변을 완전제곱꼴로 변형

$$\text{하면 } 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$$

$$\text{그런데 모든 실수 } x \text{에 대하여 } 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{이므로}$$

$$4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \text{을 만족하는 것은 } x=-\frac{1}{2} \text{ 뿐이다.}$$

ㄷ. $x^2-3x+3=0$ 이라 하고, 판별식 D 를 구하면

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 3 = -3 < 0$$

$D < 0$ 이므로 주어진 부등식의 좌변을 완전제곱꼴로 변형

$$\text{하면 } \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq 0$$

$$\text{그런데 모든 실수 } x \text{에 대하여 } \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{이므로}$$

해가 없다.

ㄹ. $5x^2+3x-1=0$ 이라 하고, 판별식 D 를 구하면

$$D = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1) = 29 > 0$$

$D > 0$ 이므로 $5x^2+3x-1=0$ 에서 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1)}}{2 \cdot 5} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{10}$$

이를 이용하여 $5x^2+3x-1 > 0$ 의 좌변을 인수분해하면

$$\left(x - \frac{-3-\sqrt{29}}{10}\right)\left(x - \frac{-3+\sqrt{29}}{10}\right) > 0$$

$$\therefore x < \frac{-3-\sqrt{29}}{10} \text{ 또는 } x > \frac{-3+\sqrt{29}}{10}$$

따라서 보기 중 해가 없는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

004

주어진 부등식을 $Ax < B$ 의 꼴로 정리하면

$$(2a-b)x < -a-2b \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

그런데 이 부등식의 해가 $x > 4$ 이므로 $2a-b < 0$

$$\textcircled{㉠} \text{의 양변을 } 2a-b \text{로 나누면 } x > \frac{-a-2b}{2a-b}$$

주어진 조건에서 부등식의 해가 $x > 4$ 이므로

$$\frac{-a-2b}{2a-b} = 4, -a-2b=8a-4b$$

$$\therefore b = \frac{9}{2}a \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

그런데 $2a-b < 0$ 이므로

$$2a - \frac{9}{2}a = -\frac{5}{2}a < 0 \quad \therefore a > 0$$

②을 부등식 $-9ax+2b < 0$ 에 대입하면

$$-9ax+9a < 0, 9ax > 9a$$

그런데 $a > 0$ 이므로 구하는 부등식의 해는 $x > 1$

005

이차방정식 $x^2-2kx+1=0$ 이 허근을 가질 조건은

$$D < 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = (-k)^2 - 1 < 0, (k+1)(k-1) < 0$$

$$\therefore -1 < k < 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이차방정식 $x^2 + 2kx - 2k = 0$ 이 허근을 가질 조건은

$$D < 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = k^2 - (-2k) < 0, k(k+2) < 0$$

$$\therefore -2 < k < 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 의 공통 범위는 $-1 < k < 0$

006

이차항의 계수가 1이고, 해가 $-2 < x < 3$ 인 이차부등식은

$$(x+2)(x-3) < 0 \quad \therefore x^2 - x - 6 < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 부등식 $ax^2 + bx + c < 0$ 은 $\textcircled{1}$ 과 부등호의 방향이 같으므로 $\textcircled{1}$ 의 양변에 양수 a 를 곱하여 두 부등식의 계수를 비교하면

$$ax^2 - ax - 6a < 0 \iff ax^2 + bx + c < 0$$

$$\therefore b = -a, c = -6a$$

$$\therefore \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$$

$$= \frac{-a-6a}{a} + \frac{-6a+a}{-a} + \frac{a-a}{-6a}$$

$$= -7 + 5 + 0 = -2$$

007

주어진 식을 x 에 대한 이차부등식으로 볼 때,
 $x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 이 x 에 대하여 항상 성립하기 위한 조건은 $x^2 + 2axy + by^2 = 0$ 이라 할 때

$$D \leq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = (ay)^2 - by^2 \leq 0, (a^2 - b)y^2 \leq 0$$

그런데 $y^2 \geq 0$ 이므로 $a^2 - b \leq 0 \quad \therefore a^2 \leq b$

008

집합 $A = \{x | x^2 - 7x + 10 \leq 0\}$ 에서

$$x^2 - 7x + 10 \leq 0, (x-2)(x-5) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq x \leq 5 \Rightarrow A = \{x | 2 \leq x \leq 5\}$$

집합 $B = \{x | x^2 + ax + b < 0\}$ 에서 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$$x^2 + ax + b < 0 \iff (x-\alpha)(x-\beta) < 0$$

$$\therefore \alpha < x < \beta \Rightarrow B = \{x | \alpha < x < \beta\}$$

이때 $A \cup B = \{x | -1 < x \leq 5\}$,

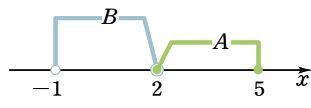
$A \cap B = \emptyset$ 를 만족하도록

두 집합을 수직선에 나타

내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore B = \{x | -1 < x < 2\} \Rightarrow -1 < x < 2$$

이차항의 계수가 1이고, 해가 $-1 < x < 2$ 인 이차부등식은



$$(x+1)(x-2) < 0, x^2 - x - 2 < 0 \iff x^2 + ax + b < 0$$

두 부등식의 계수를 비교하면 $a = -1, b = -2$

009

삼각형이 되기 위해서는 제일 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로

$$n + (n+5) > n+8 \quad \therefore n > 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 둔각삼각형이 되기 위한 조건은

$$(n+8)^2 > n^2 + (n+5)^2, n^2 - 6n - 39 < 0$$

$$\therefore 3 - \sqrt{48} < n < 3 + \sqrt{48} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의해 } 3 < n < 3 + \sqrt{48}$$

$$\text{그런데 } 6 < \sqrt{48} < 7 \text{이므로 } 9 < 3 + \sqrt{48} < 10$$

따라서 $3 < n < 10$ 이므로 자연수 n 의 값은 4, 5, 6, 7, 8, 9로 모두 6개이다.

TIP 예각, 둔각삼각형이 될 조건

세 변의 길이가 a, b, c 인 삼각형에서 (단, $a > b \geq c$)

(1) 예각삼각형이 될 조건

$$\begin{cases} a+b > c \\ a^2 < b^2 + c^2 \end{cases}$$

(2) 둔각삼각형이 될 조건

$$\begin{cases} a+b > c \\ a^2 > b^2 + c^2 \end{cases}$$

010

$[x+1] = [x] + 1$ 이므로 주어진 부등식을 정리하면

$$([x]+1)^2 - 3[x] - 7 < 0, [x]^2 - [x] - 6 < 0$$

$$([x]-3)([x]+2) < 0 \quad \therefore -2 < [x] < 3$$

$[x]$ 는 정수이므로 $[x]$ 의 값이 정수인 경우로 나누어 풀면

$$(i) [x] = -1 \text{ 일 때, } -1 \leq x < 0$$

$$(ii) [x] = 0 \text{ 일 때, } 0 \leq x < 1$$

$$(iii) [x] = 1 \text{ 일 때, } 1 \leq x < 2$$

$$(iv) [x] = 2 \text{ 일 때, } 2 \leq x < 3$$

$$(i), (ii), (iii), (iv) \text{에서 } -1 \leq x < 3$$

$$\therefore \alpha = -1, \beta = 3 \quad \therefore \alpha^2 + \beta^2 = (-1)^2 + 3^2 = 10$$

03 부등식의 증명

개념 확인 문제

p. 195

$$1 (1) \sqrt{17} - 2 > 2 \quad (2) \sqrt{5} + \sqrt{2} > 1 + \sqrt{6}$$

1

$$(1) \sqrt{17} - 2 \text{에서 } 2 \text{를 빼면 } (\sqrt{17} - 2) - 2 = \sqrt{17} - 4 > 0$$

$$\therefore \sqrt{17} - 2 > 2$$

$$(2) \sqrt{5} + \sqrt{2} \text{와 } 1 + \sqrt{6} \text{을 각각 제곱하여 빼면}$$

$$(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - (1 + \sqrt{6})^2 = (7 + 2\sqrt{10}) - (7 + 2\sqrt{6})$$

$$= 2(\sqrt{10} - \sqrt{6}) > 0$$

$$\therefore \sqrt{5} + \sqrt{2} > 1 + \sqrt{6}$$

262 (1) 해설 참조 (2) 해설 참조

263 $A \geq B$ (단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)

264 (가) $ay-bx$ (나) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

265 $P \leq Q$ (단, 등호는 $ab=0$ 일 때 성립)

266 (가) a^2+b^2 (나) $|ab|$ (다) $ab-|ab|$

267 (1) 8 (2) 27 268 (1) 10 (2) 6 269 4

270 (1) (최솟값) $= -13$, (최댓값) $= 13$
(2) (최솟값) $= -\sqrt{65}$, (최댓값) $= \sqrt{65}$

271 $-14 \leq x-2y+3z \leq 14$ 272 9

262

(1) 좌변에서 우변을 뺀 후 정리하면

$$\begin{aligned} & a^2 + 2b^2 - b(b-2a) \\ &= a^2 + 2b^2 - b^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 \\ &= (a+b)^2 \geq 0 \text{ (단, 등호는 } a=-b \text{일 때 성립)} \end{aligned}$$

(2) 좌변에서 우변을 뺀 후 정리하면

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 - 2(a-b-1) \\ &= a^2 + b^2 - 2a + 2b + 2 = a^2 - 2a + 1 + b^2 + 2b + 1 \\ &= (a-1)^2 + (b+1)^2 \geq 0 \\ & \text{(단, 등호는 } a=1, b=-1 \text{일 때 성립)} \end{aligned}$$

263

두 수 A, B를 뺀 후 정리하면

$$\begin{aligned} A-B &= (a^2+1)(b^2+1) - (ab+1)^2 \\ &= a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 - (a^2b^2 + 2ab + 1) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \\ &= (a-b)^2 \geq 0 \text{ (단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립)} \\ \therefore A &\geq B \text{ (단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립)} \end{aligned}$$

264

좌변에서 우변을 뺀 후 정리하면

$$\begin{aligned} & (a^2+b^2)(x^2+y^2) - (ax+by)^2 \\ &= (a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2) - (a^2x^2+b^2y^2+2abxy) \\ &= a^2y^2+b^2x^2-2abxy = (\text{가) } ay-bx)^2 \geq 0 \\ & \text{(단, 등호는 } \text{나) } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \text{일 때 성립)} \\ \therefore (a^2+b^2)(x^2+y^2) &\geq (ax+by)^2 \end{aligned}$$

265

$a \geq 0, b \geq 0$ 에서 $P = \sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq 0, Q = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}} \geq 0$ 이므로
P와 Q를 각각 제곱하여 빼면

$$\begin{aligned} P^2 - Q^2 &= \left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{a+b}{2} - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{2} \\ &= -\sqrt{ab} \leq 0 \text{ (}\because a \geq 0, b \geq 0\text{)} \end{aligned}$$

따라서 $P^2 \leq Q^2$ 이고, $P \geq 0, Q \geq 0$ 이므로 $P \leq Q$ 이다.

(단, 등호는 $\sqrt{ab}=0$, 즉 $ab=0$ 일 때 성립)

266

$|a+b| \geq 0, |a|+|b| \geq 0$ 이므로

$$|a+b| \leq |a|+|b| \iff |a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$$

좌변에서 우변을 뺀 후 정리하면

$$\begin{aligned} & |a+b|^2 - (|a|+|b|)^2 \\ &= (\text{가) } a^2+b^2 + 2ab - (a^2+b^2+2\text{나) } |ab|) \\ &= 2(\text{다) } ab - |ab| \leq 0 \text{ (}\because |ab| \geq ab\text{)} \\ \therefore |a+b| &\leq |a|+|b| \end{aligned}$$

이때 등호는 $|ab|=ab$ 일 때 성립하므로 $ab \geq 0$ 일 때, 즉 a, b의 부호가 같거나 둘 중 하나가 0일 때 성립한다.

267

(1) $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하 평균의 관계에 의해

$$\begin{aligned} 2ab + \frac{8}{ab} &\geq 2\sqrt{2ab \cdot \frac{8}{ab}} \\ &= 2 \cdot 4 = 8 \\ \text{(단, 등호는 } 2ab &= \frac{8}{ab}, \text{ 즉 } ab=2 \text{일 때 성립)} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 8이다.

(2) 주어진 식을 전개하여 정리하면

$$\begin{aligned} (3a+4b)\left(\frac{1}{a} + \frac{3}{b}\right) &= 3 + \frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} + 12 \\ &= \frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} + 15 \end{aligned}$$

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$\begin{aligned} \frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} + 15 &\geq 2\sqrt{\frac{9a}{b} \cdot \frac{4b}{a}} + 15 \\ &= 2 \cdot 6 + 15 = 27 \\ \text{(단, 등호는 } \frac{9a}{b} &= \frac{4b}{a}, \text{ 즉 } 3a=2b \text{일 때 성립)} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 27이다.

268

(1) $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$\begin{aligned} a+b &\geq 2\sqrt{ab} \text{ (단, 등호는 } a=b=5 \text{일 때 성립)} \\ &= 2\sqrt{25} = 10 \end{aligned}$$

따라서 $a+b$ 의 최솟값은 10이다.

(2) $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$\begin{aligned} 12 &= 2a + 3b \\ &\geq 2\sqrt{2a \cdot 3b} \quad (\text{단, 등호는 } 2a = 3b \text{일 때 성립}) \\ 36 &\geq 6ab \quad \therefore ab \leq 6 \\ \text{따라서 } ab \text{의 최댓값은 } 6 \text{이다.} \end{aligned}$$

269

$x + y > 2$ 이므로 $x + y - 2 > 0$

이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$\begin{aligned} x + y + \frac{1}{x + y - 2} &= x + y - 2 + \frac{1}{x + y - 2} + 2 \\ &\geq 2\sqrt{(x + y - 2) \cdot \frac{1}{x + y - 2}} + 2 \\ &= 2 + 2 = 4 \\ (\text{단, 등호는 } x + y - 2 &= \frac{1}{x + y - 2}, \text{ 즉 } x + y = 3 \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

270

실수 a, b, x, y 에 대하여 코시-슈바르츠의 부등식은

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(단, 등호는 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ 일 때 성립)

(1) $\textcircled{1}$ 에 $a = 3, b = 2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} (3^2 + 2^2)(x^2 + y^2) &\geq (3x + 2y)^2 \\ (3x + 2y)^2 &\leq 13 \cdot 13 = 13^2 \\ \therefore -13 &\leq 3x + 2y \leq 13 \\ (\text{단, 등호는 } \frac{x}{3} &= \frac{y}{2} \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 $3x + 2y$ 의 최솟값은 -13 , 최댓값은 13 이다.

(2) $\textcircled{1}$ 에 $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3}$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} \{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\}(x^2 + y^2) &\geq (\sqrt{2}x + \sqrt{3}y)^2 \\ (\sqrt{2}x + \sqrt{3}y)^2 &\leq 5 \cdot 13 = 65 \\ \therefore -\sqrt{65} &\leq \sqrt{2}x + \sqrt{3}y \leq \sqrt{65} \\ (\text{단, 등호는 } \frac{x}{\sqrt{2}} &= \frac{y}{\sqrt{3}} \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y$ 의 최솟값은 $-\sqrt{65}$, 최댓값은 $\sqrt{65}$ 이다.

271

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$$\begin{aligned} \{1^2 + (-2)^2 + 3^2\}(x^2 + y^2 + z^2) &\geq (x - 2y + 3z)^2 \\ (\text{단, 등호는 } x &= -\frac{y}{2} = \frac{z}{3} \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

이때 $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ 이므로

$$(x - 2y + 3z)^2 \leq 14^2 \quad \therefore -14 \leq x - 2y + 3z \leq 14$$

272

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$$\begin{aligned} (1^2 + 2^2 + 2^2)(x^2 + y^2 + z^2) &\geq (x + 2y + 2z)^2 \\ (\text{단, 등호는 } \frac{x}{1} &= \frac{y}{2} = \frac{z}{2} \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

이때 $x + 2y + 2z = 9$ 이므로

$$9(x^2 + y^2 + z^2) \geq 9^2 \quad \therefore x^2 + y^2 + z^2 \geq 9$$

따라서 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은 9이다.

소단원 연습문제

pp. 200~201

001 $ab + 1 > a + b$	002 ③	003 ②	004 ①
005 $\frac{4}{5}$	006 ②	007 ①	008 ②

001

$a > 1, b > 1$ 이므로 $a - 1 > 0, b - 1 > 0$

두 식을 뺀 후 정리하면

$$\begin{aligned} (ab + 1) - (a + b) &= ab - a - b + 1 = (a - 1)(b - 1) > 0 \\ \therefore ab + 1 &> a + b \end{aligned}$$

002

두 수를 뺀 후 통분하여 정리하면

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{ma + nb}{m + n} - \frac{ma - nb}{m - n} \\ &= \frac{(ma + nb)(m - n) - (ma - nb)(m + n)}{(m + n)(m - n)} \\ &= \frac{(am^2 - amn + bmn - bn^2) - (am^2 + amn - bmn - bn^2)}{(m + n)(m - n)} \\ &= \frac{-2amn + 2bmn}{(m + n)(m - n)} = \frac{2mn(b - a)}{(m + n)(m - n)} \end{aligned}$$

그런데 $a > b > 0, m > n > 0$ 이므로

$$mn > 0, b - a < 0, m + n > 0, m - n > 0$$

$$\therefore A - B = \frac{2mn(b - a)}{(m + n)(m - n)} < 0 \quad \therefore A < B$$

003

$b > a > 0$ 이므로 $b - a > 0$

각각의 보기에서 두 식을 뺀 후 정리하면

$$\neg. \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} = \frac{b+1 - (a+1)}{(a+1)(b+1)} = \frac{b-a}{(a+1)(b+1)} > 0$$

$$\therefore \frac{1}{a+1} > \frac{1}{b+1} \quad (\because \text{참})$$

$$\begin{aligned} \neg. \frac{a}{a+1} - \frac{b}{b+1} &= \frac{a(b+1) - b(a+1)}{(a+1)(b+1)} \\ &= \frac{a-b}{(a+1)(b+1)} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a}{a+1} &< \frac{b}{b+1} (\because \text{참}) \\ \therefore \frac{a}{b+1} - \frac{b}{a+1} &= \frac{a(a+1) - b(b+1)}{(a+1)(b+1)} = \frac{a^2 + a - b^2 - b}{(a+1)(b+1)} \\ &= \frac{(a+b)(a-b) + (a-b)}{(a+1)(b+1)} \\ &= \frac{(a-b)(a+b+1)}{(a+1)(b+1)} < 0 \\ \therefore \frac{a}{b+1} &< \frac{b}{a+1} (\because \text{거짓}) \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

004

좌변에서 우변을 뺀 후 정리하면

$$\begin{aligned} &(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) \\ &= \frac{1}{2} (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\ &= \frac{1}{2} \{ (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \geq 0 \end{aligned}$$

($\because$ (실수) $^2 \geq 0$)

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
 이때 등호는 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$ 일 때,
 즉 $\boxed{a=b=c}$ 일 때 성립한다.

005

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{5}{xy}$ 에서 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, 즉 $\frac{5}{xy}$ 가 최솟값을 가지기 위해서는 xy 가 최댓값을 가져야 한다.

한편, 산술평균과 기하평균의 관계에 의해
 $5 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립)

$$xy \leq \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

이므로 xy 의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이다.

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{xy} \geq 5 \cdot \frac{4}{25} = \frac{4}{5}$$

따라서 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 의 최솟값은 $\frac{4}{5}$ 이다.

006

코시-슈바르츠의 부등식에 의해
 $(1^2 + 1^2) \{ (\sqrt{5x})^2 + (\sqrt{2y})^2 \} \geq (\sqrt{5x} + \sqrt{2y})^2$
 (단, 등호는 $\sqrt{5x} = \sqrt{2y}$ 일 때 성립)
 $2(5x + 2y) \geq (\sqrt{5x} + \sqrt{2y})^2$

이때 $5x + 2y = 18$ 이므로

$$(\sqrt{5x} + \sqrt{2y})^2 \leq 2 \cdot 18 = 36 \quad \therefore -6 \leq \sqrt{5x} + \sqrt{2y} \leq 6$$

따라서 $\sqrt{5x} + \sqrt{2y}$ 의 최댓값은 6이다.

007

직사각형의 가로 길이를 $2x$, 세로 길이를 y 라 하면 반지름의 길이가 6이므로 피타고라스의 정리에 의해

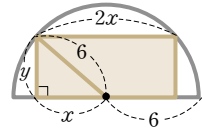
$$x^2 + y^2 = 36 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x > 0$, $y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$\begin{aligned} 36 = x^2 + y^2 &\geq 2\sqrt{x^2 y^2} \quad (\text{단, 등호는 } x=y \text{일 때 성립}) \\ &= 2xy \end{aligned}$$

따라서 직사각형의 넓이는 $2xy \leq 36$ 이므로 최댓값은 36이다.

단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립하므로 $x=y=3\sqrt{2}$ ($\because \textcircled{1}$)
 $\therefore$ (직사각형의 둘레의 길이) $= 2(2x + y)$
 $= 2(6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) = 18\sqrt{2}$



008

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$$(1^2 + 1^2 + 1^2)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \geq (S_1 + S_2 + S_3)^2$$

(단, 등호는 $S_1 = S_2 = S_3$ 일 때 성립)

그런데 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 48$ 이므로

$$(S_1 + S_2 + S_3)^2 \leq 3 \cdot 48 = 144$$

$$\therefore 0 < S_1 + S_2 + S_3 \leq 12 \quad (\because S_1 > 0, S_2 > 0, S_3 > 0)$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이의 최댓값은 12이다.

중단원 연습문제

pp. 202~204

001 ㄱ, ㄷ	002 ⑤	003 ④	004 ⑤
005 $-\frac{3}{2} < x \leq -\frac{1}{2}$	006 ②	007 ①	
008 10 m	009 2	010 ①	011 ④
012 $-4 < k \leq 0$	013 90 m ²		

001

$a > b$, $c > d$ 이므로 $a-b > 0$, $c-d > 0$

$$\therefore (a+c) - (b+d) = (a-b) + (c-d) > 0$$

$$\therefore a+c > b+d (\because \text{참})$$

ㄴ. [반례] $a=1$, $b=-2$, $c=2$, $d=-1$ 이면

$$a > b, c > d \text{이지만 } ac = bd (\because \text{거짓})$$

$$\begin{aligned} \therefore (ac+bd) - (ad+bc) &= a(c-d) - b(c-d) \\ &= (a-b)(c-d) > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore ac+bd > ad+bc (\because \text{참})$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

002

이차항의 계수가 1이고, 해가 $2 < x < 3$ 인 이차부등식은

$$(x-2)(x-3) < 0 \quad \therefore x^2 - 5x + 6 < 0$$

이는 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 의 해와 일치하므로 두 식의 계수를 비교하면 $a = -5$, $b = 6$

즉, $x^2 - bx - a > 0 \iff x^2 - 6x + 5 > 0$ 이므로 이를 풀면
 $(x-1)(x-5) > 0 \quad \therefore x < 1$ 또는 $x > 5$

003

주어진 부등식을 x 에 대하여 정리하면

$$(a^2 - 3a + 2)x \geq a^2 - 7a + 10$$

$$(a-1)(a-2)x \geq (a-2)(a-5)$$

이 부등식이 항상 성립할 조건은

$$(a-1)(a-2) = 0, (a-2)(a-5) \leq 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 2 \text{ 이고, } 2 \leq a \leq 5$$

따라서 두 조건을 모두 만족하는 a 의 값은 $a = 2$

004

$|x^2 - x - 9| < 3$ 에서 절댓값의 정의에 의하여

$$-3 < x^2 - x - 9 < 3$$

이를 분리하여 나타내면 $\begin{cases} x^2 - x - 9 > -3 \\ x^2 - x - 9 < 3 \end{cases}$

(i) $x^2 - x - 9 > -3$ 에서 $x^2 - x - 6 > 0$

$$(x-3)(x+2) > 0 \quad \therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 3$$

(ii) $x^2 - x - 9 < 3$ 에서 $x^2 - x - 12 < 0$

$$(x-4)(x+3) < 0 \quad \therefore -3 < x < 4$$

(i), (ii)의 공통 범위를 구하면

$$-3 < x < -2 \text{ 또는 } 3 < x < 4$$

$$\therefore \alpha = -3, \beta = -2, \gamma = 3, \delta = 4$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma + \delta = (-3) + (-2) + 3 + 4 = 2$$

005

㉠을 풀면 $(3x-8)(2x+1) \geq 0$

$$\therefore x \leq -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x \geq \frac{8}{3} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉡에서 절댓값 기호 안의 식 $x+1$, $x-1$ 이 0이 되는 x 의 값 $x = -1$, $x = 1$ 을 기준으로 구간을 나누어 풀면

(i) $x < -1$ 일 때, $-(x+1) - (x-1) < 3$

$$\therefore x > -\frac{3}{2}$$

$$\text{그런데 } x < -1 \text{ 이므로 } -\frac{3}{2} < x < -1$$

(ii) $-1 \leq x < 1$ 일 때, $x+1 - (x-1) < 3$

$2 < 3$ 은 $-1 \leq x < 1$ 에서 항상 성립한다.

(iii) $x \geq 1$ 일 때, $x+1 + x-1 < 3 \quad \therefore x < \frac{3}{2}$

$$\text{그런데 } x \geq 1 \text{ 이므로 } 1 \leq x < \frac{3}{2}$$

(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2} \quad \dots\dots \text{㉢}$

㉢, ㉡에서 $-\frac{3}{2} < x \leq -\frac{1}{2}$

006

좌변에서 우변을 뺀 후 정리하면

$$(x+y)(y+z)(z+x) - 8xyz$$

$$= (\boxed{\text{㉠}} y + z)x^2 + (z+x)y^2 + (x+y)z^2 - \boxed{\text{㉡}} 6xyz$$

$$= (y^2 + z^2)x + (\boxed{\text{㉢}} z^2 + x^2)y + (x^2 + y^2)z - \boxed{\text{㉣}} 6xyz$$

$$= (y^2 + z^2 - 2yz)x + (z^2 + x^2 - 2zx)y + (x^2 + y^2 - 2xy)z$$

$$= (y-z)^2 x + (z-x)^2 y + (\boxed{\text{㉤}} x-y)^2 z \geq 0$$

($\because (y-z)^2 \geq 0, x > 0, (z-x)^2 \geq 0, y > 0, (x-y)^2 \geq 0, z > 0$)

이때 등호가 성립할 조건은 $y-z=0, z-x=0, x-y=0$ 에서 $\boxed{\text{㉥}} x=y=z$ 일 때이다.

007

두 수를 뺀 후 정리하면

$$A-B = \frac{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + 1} - \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2 + ab + b^2} - \frac{ab}{a^2 + ab + b^2} = \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}$$

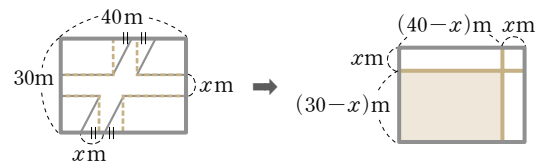
그런데 $a^2 \pm ab + b^2 = \left(a \pm \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$ (복부호동순)이

고, 등호는 $a=b=0$ 일 때 성립하는데 a, b 가 0이 아닌 실수이므로 $a^2 \pm ab + b^2 > 0$

$$\therefore A-B = \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} > 0 \quad \therefore A > B$$

008

다음 그림과 같이 직사각형 모양의 땅에서 도로를 제외한 땅을 평행이동해서 연결시킨다고 생각해도 남은 땅의 넓이는 변하지 않으므로 도로를 제외한 땅은 색칠한 부분과 같다.



도로의 폭이 x m이므로 도로를 제외한 땅의 가로 길이는 $(40-x)$ m, 세로 길이는 $(30-x)$ m이다.

(가로의 길이) = $(40-x)m$
 (세로의 길이) = $(30-x)m$
 가 되므로 남은 땅의 넓이가 $600 m^2$ 이상이 되면
 $(40-x)(30-x) \geq 600, x^2 - 70x + 600 \geq 0$
 $(x-10)(x-60) \geq 0 \quad \therefore x \leq 10 \text{ 또는 } x \geq 60$
 그런데 $x < 30$ 이므로 $x \leq 10$
 따라서 도로 폭의 최대 길이는 $10 m$ 이다.

009

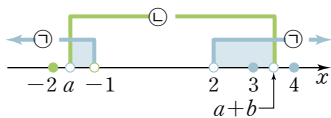
$[x]^2 + [x] - 2 < 0$ 에서
 $([x]+2)([x]-1) < 0 \quad \therefore -2 < [x] < 1$
 $[x]$ 는 정수이므로 $[x] = -1$ 또는 $[x] = 0$
 (i) $[x] = -1$ 일 때, $-1 \leq x < 0$
 (ii) $[x] = 0$ 일 때, $0 \leq x < 1$
 (i), (ii)에서 x 의 값의 범위는 $-1 \leq x < 1$
 $\therefore a = -1, b = 1 \quad \therefore b - a = 1 - (-1) = 2$

010

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해
 $x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad \therefore x + y + \frac{1}{2\sqrt{xy}} \geq 2\sqrt{xy} + \frac{1}{2\sqrt{xy}}$
 $\sqrt{xy} > 0$ 이므로 다시 산술평균과 기하평균의 관계에 의해
 $x + y + \frac{1}{2\sqrt{xy}} \geq 2\sqrt{xy} + \frac{1}{2\sqrt{xy}} \geq 2\sqrt{2\sqrt{xy} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}}} = 2$
 따라서 $x + y + \frac{1}{2\sqrt{xy}}$ 의 최솟값은 2 이다.
 이때 등호는 $x = y$ 이고, 또한 $2\sqrt{xy} = \frac{1}{2\sqrt{xy}}$ 이어야 하므로
 $x = y = \frac{1}{2}$ 일 때 성립한다.

011

$x^2 - x - 2 > 0$ 을 풀면 $(x+1)(x-2) > 0$
 $\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 2$ ㉠
 $x^2 - (2a+b)x + a^2 + ab < 0$ 을 풀면
 $x^2 - (2a+b)x + a(a+b) < 0$
 $(x-a)(x-a-b) < 0$
 b 는 양수이므로 $a < x < a+b$ ㉡
 ㉠, ㉡을 동시에 만족하
 는 x 의 정수값이 3뿐이므
 로 이를 수직선으로 나타
 내면 오른쪽 그림과 같다.
 $\therefore -2 \leq a < 3, 3 < a+b \leq 4$
 즉, a 의 최솟값은 -2 , $a+b$ 의 최댓값은 4 이므로 b 의 최댓



값은 $a = -2$ 일 때, $b = 6$ 이다.
 따라서 실수 a 의 최솟값과 b 의 최댓값의 합은
 $(-2) + 6 = 4$

012

$\sqrt{1-kx-kx^2}$ 이 0 이 아닌 실수가 되기 위해서는
 $1-kx-kx^2 > 0 \quad \therefore kx^2 + kx - 1 < 0$

k 의 값이 $k=0$ 인 경우와 $k \neq 0$ 인 경우로 나누어 풀면

(i) $k=0$ 일 때, $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 1 < 0$ 이므로 항상 성립한다.

(ii) $k \neq 0$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립할 조건은

$$\neg. (\text{이차항의 계수}) < 0 \quad \neg. D < 0$$

$$\neg. (\text{이차항의 계수}) < 0 \Rightarrow k < 0$$

$$\neg. D < 0 \Rightarrow D = k^2 - 4 \cdot k \cdot (-1) < 0, k^2 + 4k < 0$$

$$k(k+4) < 0 \quad \therefore -4 < k < 0$$

$$\neg. \neg. \text{의 공통 범위를 구하면} \quad -4 < k < 0$$

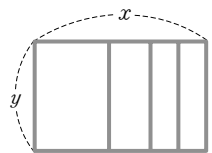
(i), (ii)에서 k 의 값의 범위는 $-4 < k \leq 0$

채점 영역	단계	채점 요소	배점 비율
문제 이해 & 해결 과정	㉠	조건을 만족하는 부등식 세우기	20%
	㉡	$k=0$ 과 $k \neq 0$ 으로 나누고, $k=0$ 인 경우 따지기	30%
	㉢	$k \neq 0$ 인 경우 판별식 D 를 이용하여 k 의 값의 범위 구하기	30%
답 구하기	㉣	㉠, ㉡에서 구한 k 의 값의 범위를 이용하여 답 구하기	20%

013

오른쪽 그림과 같이 직사각형의 가로
 의 길이를 x , 세로의 길이를 y 라
 하면

$$2x + 5y = 60$$



$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$60 = 2x + 5y \geq 2\sqrt{2x \cdot 5y} \quad (\text{단, 등호는 } 2x = 5y \text{일 때 성립})$$

$$= 2\sqrt{10xy}$$

양변을 2로 나눈 후 제곱하면

$$900 \geq 10xy \quad \therefore xy \leq 90$$

따라서 구하는 직사각형의 넓이의 최댓값은 $90 m^2$ 이다.

채점 영역	단계	채점 요소	배점 비율
문제 이해 & 해결 과정	가	가로와 세로의 길이를 각각 x, y 라 하고 관계식 구하기	20%
	나	조건에 맞도록 산술평균과 기하평균의 관계 적용하기	30%
	다	부등식을 풀어 xy 의 값의 범위 구하기	30%
답 구하기	라	구하는 넓이의 최댓값 구하기	20%

사고력 기르기

p. 205

001 ⑤

002 16

003 ②

004 50

001

$|a| < 1, |b| < 1, |c| < 1$ 이므로

$$-1 < a < 1, -1 < b < 1, -1 < c < 1$$

이고, $-1 < ab < 1$ 도 성립한다.

$$\neg. abc+1-(ab+c)=ab(c-1)-(c-1) \\ = (ab-1)(c-1) > 0$$

$$\therefore abc+1 > ab+c \quad (\therefore \text{참})$$

$$\neg. ab+1-(a+b)=ab-a-b+1 \\ = (a-1)(b-1) > 0$$

$$\therefore ab+1 > a+b \quad (\therefore \text{참})$$

$$\neg. \neg. \neg. \text{에서 } abc+1 > ab+c > a+b-1+c$$

$$\therefore abc+2 > a+b+c \quad (\therefore \text{참})$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

002

$x^2+y^2+2xy+6x+ay+b>0$ 이 모든 실수 x, y 에 대하여 항상 성립해야 하므로 먼저 실수 x 에 대한 조건을 구하기 위해 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2+2(y+3)x+y^2+ay+b>0$$

이 부등식이 항상 성립할 조건은

$$x^2+2(y+3)x+y^2+ay+b=0 \text{ 이라 할 때}$$

$$D < 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = (y+3)^2 - (y^2+ay+b) < 0$$

$$y^2+6y+9-y^2-ay-b < 0$$

$$\therefore (6-a)y+9-b < 0$$

이때 이 부등식이 모든 실수 y 에 대해서도 성립해야 하므로

$$6-a=0, 9-b=0$$

$$\therefore a=6, b=9$$

따라서 정수 b 의 최솟값이 10 이므로 $a+b$ 의 최솟값은 16 이다.

003

두 원의 반지름의 길이를 각각 R, r 라 하자.

오른쪽 그림에서 $\square ABCO$ 는 한 변의 길이가 R 인 정사각형 이므로 대각선의 길이는 $R\sqrt{2}$ 이다.

또한, $\square DO'EF$ 는 한 변의 길이가 r 인 정사각형 이므로 대각선의 길이는 $r\sqrt{2}$ 이다.

이때 한 변의 길이가 1 인 정사각형은 대각선의 길이가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$R\sqrt{2}+R+r+r\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

$$(R+r)(1+\sqrt{2})=\sqrt{2}$$

$$\therefore R+r=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=2-\sqrt{2}$$

두 원의 넓이의 합은

$$S_1+S_2=\pi R^2+\pi r^2 \\ =\pi\{(R+r)^2-2Rr\} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$R>0, r>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

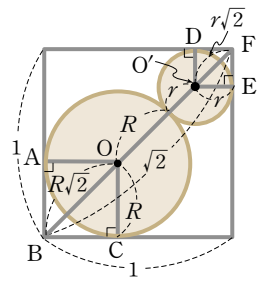
$$2-\sqrt{2}=R+r \geq 2\sqrt{Rr} \quad (\text{단, 등호는 } R=r \text{ 일 때 성립})$$

$$\therefore Rr \leq \frac{(2-\sqrt{2})^2}{4} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8}$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하여 정리하면

$$S_1+S_2 \geq \left\{ (2-\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \frac{3-2\sqrt{2}}{2} \right\} \pi \\ = (6-4\sqrt{2} - (3-2\sqrt{2})) \pi \\ = (3-2\sqrt{2}) \pi$$

따라서 S_1+S_2 의 최솟값은 $(3-2\sqrt{2})\pi$ 이다.



004

오른쪽 그림에서

$$6+4+x+y>20$$

$$4+6+20>x+y$$

가 성립해야만 주어진 오각형을 만들 수 있다.

$$\therefore 10 < x+y < 30$$

$x+y=k$ 라 할 때, 코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$$(1^2+1^2)(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$$

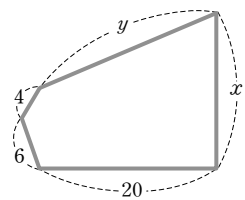
$$(\text{단, 등호는 } \frac{x}{1} = \frac{y}{1} \text{ 일 때 성립})$$

$$2(x^2+y^2) \geq k^2 \quad \therefore x^2+y^2 \geq \frac{k^2}{2}$$

이때 $10 < k < 30$ 이므로 x^2+y^2 의 최솟값은 $k=10$ 일 때,

$$\frac{k^2}{2} = \frac{10^2}{2} = 50 \text{ 보다 크다.}$$

따라서 $x^2+y^2 > 50$ 이므로 $x^2+y^2 > a$ 를 만족하는 a 의 최댓값은 50 이다.





BASIC



BASIC