제 2 교시

수리 영역 (가형)

megastudy

5지선다형

1. $\log_8 24 - \dfrac{1}{\log_6 8}$ 의 값은? [2점]

① $-\dfrac{2}{3}$ ② $-\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

2. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^3의 모든 성분의 합은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

3. $a=\sin\alpha+\cos\beta$, $b=\sin\beta+\cos\alpha$일 때, a^2+b^2의 최댓값은? [2점]

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

4. 방정식 $\sqrt{2^x+5}-\sqrt{8-2^x}=1$의 해를 $x=\alpha$라 할 때, 다음 중 옳은 것은? [3점]

① $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{1}{2}<\alpha<\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{3}{2}<\alpha<\dfrac{5}{2}$
④ $\dfrac{5}{2}<\alpha<\dfrac{7}{2}$ ⑤ $\dfrac{7}{2}<\alpha<\dfrac{9}{2}$

5. 매개변수 t로 나타내어지는 곡선 $x=4t-4\sin t$, $y=4-4\cos t$에 대하여 $t=\frac{5}{6}\pi$에 대응하는 점에서 그은 접선의 기울기는? [3점]

① $2-\sqrt{3}$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\sqrt{3}$
④ $\sqrt{3}+1$ ⑤ $\sqrt{3}+2$

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases} a & (x=0) \\ \dfrac{b-\cos^2 x}{3x\ln(1+4x)} & (x\neq 0) \end{cases}$$

가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $\frac{1}{a}+b$의 값은? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

7. 어떤 그래프 G의 연결 상태를 나타내는 행렬을 A라 할 때, 행렬 A^2은 다음과 같다.

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

그래프 G에 대한 설명 중 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

〈보기〉

ㄱ. 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 최댓값은 3이다.
ㄴ. 모든 변의 개수는 6이다.
ㄷ. 각 꼭짓점에서 두 개의 변을 지나 다른 꼭짓점으로 가는 모든 경로의 수는 18이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 미분가능하고 $f(1)=f'(1)=4$를 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim_{x\to 4}\frac{\log_2 g(x)}{x-4}$의 값은? (단, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$, $g(x)>0$이다.) [3점]

① $\frac{1}{5\ln 2}$ ② $\frac{1}{4\ln 2}$ ③ $\frac{1}{3\ln 2}$
④ $\frac{1}{2\ln 2}$ ⑤ $\frac{1}{\ln 2}$

9. 두 이차정사각행렬 A, B는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 행렬 $A+B$의 역행렬은 $A^{-1}+B^{-1}$이다.
(나) $2AB=E$

행렬 A^2+B^2은? (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.) [3점]

① $-2E$ ② $-\frac{1}{2}E$ ③ O
④ $\frac{1}{2}E$ ⑤ $2E$

10. 지상에서 어떤 물체를 처음 속도 v(m/초)로 지면에 수직으로 쏘아 올리면 공기의 저항으로 인하여 최고점까지 상승하는 데 걸린 시간 T(초)는 다음과 같이 나타낼 수 있다고 한다.

$T=k\log\left(1+\frac{v}{10}\right)$ (단, k는 0이 아닌 상수)

이 물체를 처음 속도 30(m/초)로 지면에 수직으로 쏘아 올렸을 때 최고점까지 상승하는 데 걸린 시간이 T_1이면, 처음 속도 a(m/초)로 지면에 수직으로 쏘아 올렸을 때 최고점까지 상승하는 데 걸린 시간은 $2T_1$이 된다고 한다. a의 값은? [3점]

① 60 ② 90 ③ 120
④ 150 ⑤ 180

11. 두 실수 a, b에 대하여 연산 $*$를

$$a*b=\begin{cases} a+b & (a<b) \\ 2ab & (a\geq b) \end{cases}$$

로 정의할 때, 정적분 $\int_{-1}^{1}(e^x*1)dx$의 값은? [3점]

① $2e-\frac{1}{e}-2$　② $2e-\frac{1}{e}-1$　③ $2e-\frac{1}{e}$
④ $2e-\frac{1}{e}+1$　⑤ $2e-\frac{1}{e}+2$

12. $0<x<\frac{\pi}{4}$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$
(나) $f'(x)=\sqrt{1-4\{f(x)\}^2}$

이계도함수 $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값은? [3점]

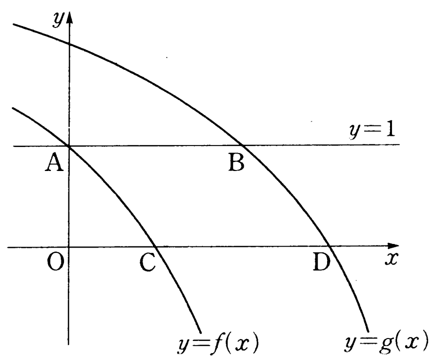
① $-3\sqrt{3}$　② $-\frac{5}{2}\sqrt{3}$　③ $-2\sqrt{3}$
④ $-\frac{3}{2}\sqrt{3}$　⑤ $-\sqrt{3}$

13. 그림은 두 함수

$f(x)=2-2^x$,

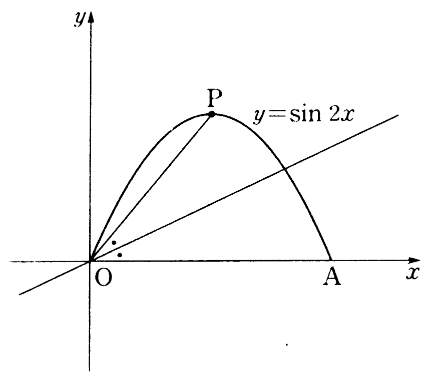
$g(x)=\log_2(-2x+p)+q$

의 그래프를 나타낸 것이다. 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 x축과 만나는 점을 각각 C, D라 하면, 사각형 ACDB는 넓이가 2인 평행사변형이다. 두 실수 p, q의 합 $p+q$의 값은? [4점]



① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

14. 곡선 $y=\sin 2x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin 2t)$가 있다. 점 $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 $\angle\mathrm{AOP}$를 이등분하는 직선의 기울기를 $m(t)$라 할 때, $\lim_{t\to+0} m(t)$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{-1+\sqrt{2}}{5}$ ② $\frac{1+\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

15. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $\begin{cases} a_{2n-1}=2a_n-1 \\ a_{2n}=2a_n \end{cases}$ 을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음은 수열 $\left\{\frac{S_{2^n}}{2^n}\right\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

> $S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=4S_n-\boxed{(가)}$
>
> $\therefore S_{2^n}=4S_{2^{n-1}}-\boxed{(나)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
>
> $\frac{S_{2^n}}{2^n}=T_n$이라 하면 $T_{n-1}=\frac{S_{2^{n-1}}}{2^{n-1}}$이므로
>
> $T_n=2T_{n-1}-\boxed{(다)}$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$
>
> 따라서 $T_1=\frac{S_2}{2}=\frac{3}{2}$이므로
>
> $T_n=2^{n-1}+\boxed{(다)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
>
> 이상에서 수열 $\left\{\frac{S_{2^n}}{2^n}\right\}$의 일반항은 $\frac{S_{2^n}}{2^n}=2^{n-1}+\boxed{(다)}$이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고 (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $af(4)g(4)$의 값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

16. 그림은 모든 실수 x에 대하여

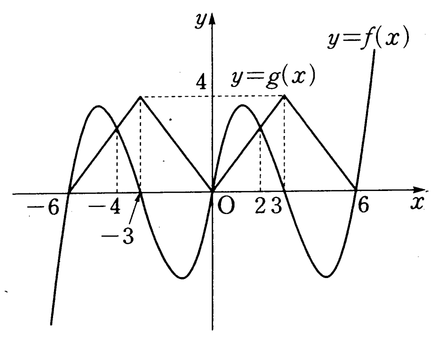
$$f(-x)=-f(x),\ g(x+6)=g(x)$$

를 만족시키는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 일부분을 나타낸 것이다.

$-6\le x\le 6$에서 방정식

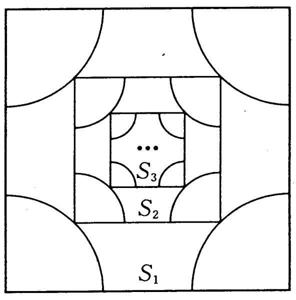
$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}^2+\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

의 실근의 개수를 a, 모든 실근의 합을 b라 할 때, $a+b$의 값은? [4점]



① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

17. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 S_1의 각 꼭짓점에서 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 정사각형 S_1의 한 변의 길이의 $\frac{1}{3}$이 되는 사분원을 S_1 내부에 그렸을 때, 네 개의 사분원의 호의 길이의 합을 l_1이라 하자. 정사각형 S_1의 내부에 각 사분원과 한 점에서만 만나도록 정사각형 S_2를 그리고 정사각형 S_2의 각 꼭짓점에서 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 정사각형 S_2의 한 변의 길이의 $\frac{1}{3}$이 되는 사분원을 S_2 내부에 그렸을 때, 네 개의 사분원의 호의 길이의 합을 l_2라 하자. 정사각형 S_2의 내부에 각 사분원과 한 점에서만 만나도록 정사각형 S_3을 그리고 정사각형 S_3의 각 꼭짓점에서 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 정사각형 S_3의 한 변의 길이의 $\frac{1}{3}$이 되는 사분원을 S_3 내부에 그렸을 때, 네 개의 사분원의 호의 길이의 합을 l_3이라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 n번째 생기는 네 개의 사분원의 호의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = a\pi$이다. 이때, a^2의 값은? (단, 정사각형 S_2, S_3, $\cdots$의 꼭짓점은 모두 정사각형 S_1의 대각선 위에 있다.) [4점]



① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

18. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가질 때, 해의 집합을 $S(k)$라 하자. 좌표평면에서 집합 $S(k)$의 한 원소 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$와 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=1$ 위의 한 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이의 최솟값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

① $\sqrt{2}-1$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{2}+1$ ⑤ $2\sqrt{2}$

19. $0<x<\pi$에서 방정식
$2(\cos 4x+\cos 2x)-2(\cos 3x+\cos x)+1=0$의 해의 개수는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

20. 공차가 0이 아닌 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하자. 임의의 자연수 n에 대하여 $\dfrac{T_n}{S_n}=\dfrac{2n-2}{n+1}$가 성립할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{a_n-b_n}$의 값은? [4점]

① $-\dfrac{3}{2}$ ② -2 ③ $-\dfrac{5}{2}$
④ -3 ⑤ $-\dfrac{7}{2}$

21. 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$인 함수 $f(x)$가

$f(x)=\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{n}\cdot\frac{kx}{n}\cos\frac{kx}{n}\right)$일 때, $f(\pi)$의 값은? [4점]

① -2 ② $-\frac{\pi}{2}$ ③ -1

④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ 2

단답형

22. 연립부등식

$$\begin{cases} x^2-12x+32 \geq 0 \\ \dfrac{x-12}{x-1} \leq 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

23. $x>-2$에서 정의된 함수 $f(x)=\int_{-2}^{x}(t^4-t^3-6t^2)dt$가 있다. 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 최솟값을 가질 때, α의 값을 구하시오. [3점]

24. 첫째항과 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 세 항 a_1, a_5, a_{41}이 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이룰 때, $50r$의 값을 구하시오. [3점]

25. 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n + 3b_n - 4) = 1$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 = \frac{q}{p}$이다. p, q가 서로소인 자연수일 때, $p+q$의 값을 구하시오. [3점]

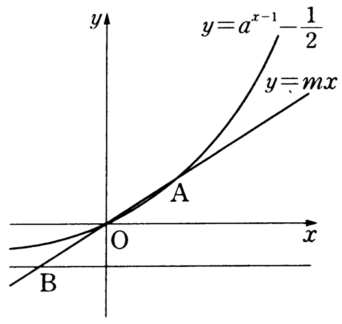
26. 일차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=8$
(나) $\int_{-2}^{2}(3x^2+1)f(x)dx = -40$

$f(5)$의 값을 구하시오. [3점]

27. 함수 $f(x)=e^{2x-4}$에 대하여
$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)-f\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)\right\}$의 값을 구하시오. [4점]

28. 좌표평면에서 지수함수 $y=a^{x-1}-\frac{1}{2}$의 그래프는 원점을 지나며 직선 $y=mx$와 제1사분면 위의 점 A에서 만난다. 곡선 $y=a^{x-1}-\frac{1}{2}$의 점근선과 직선 $y=mx$가 만나는 점을 B라 하면 두 점 A, B는 원점에 대하여 대칭일 때, 두 상수 a와 m에 대하여 $\frac{a^2}{m^2}$의 값을 구하시오. [4점]



29. 함수 $f(x)=xe^{-\frac{1}{8}x^2}$의 그래프를 x축의 방향으로 10만큼 평행이동시킨 그래프를 나타내는 함수를 $y=g(x)$라 하자. 구간 $[-a,\ a]$에서 함수 $y=g(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m=0$이 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

30. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식을 만족시킨다.

$$\tan\frac{a_n}{2}=\sqrt{\frac{n}{n+2}}\ \left(\text{단, } 0<a_n<\frac{\pi}{2}\right)$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{\cos a_n}{\cos a_{2n+1}}$의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수리 영역 (나형)

megastudy

5 지선다형

1. $\log_8 24 - \frac{1}{\log_6 8}$의 값은? [2점]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

2. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^3의 모든 성분의 합은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

3. 세 수 $A=\sqrt[3]{4}$, $B=\sqrt[4]{6}$, $C=\sqrt[6]{12}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은? [2점]

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<B<A$

4. 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$a_1=1,\ \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

a_9의 값은? [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

5. 함수

$$f(x)=\begin{cases} a & (x=0) \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2012x^2}{(1+x^2)^{n-1}} & (x\neq 0)\end{cases}$$

이 $x=0$에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2012}$ ② $\frac{1}{2011}$ ③ 1
④ 2011 ⑤ 2012

6. 두 이차정사각행렬 A, B는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A+B=O$
(나) $AB=E$

$(A+B)+(A^2+B^2)+(A^3+B^3)+\cdots+(A^{2013}+B^{2013})$을 간단히 한 것은? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬이다.) [3점]

① $-2E$ ② $-E$ ③ O
④ E ⑤ $2E$

7. 어떤 그래프 G의 연결 상태를 나타내는 행렬을 A라 할 때, 행렬 A^2은 다음과 같다.

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

그래프 G에 대한 설명 중 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

〈 보기 〉

ㄱ. 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 최댓값은 3이다.
ㄴ. 모든 변의 개수는 6이다.
ㄷ. 각 꼭짓점에서 두 개의 변을 지나 다른 꼭짓점으로 가는 모든 경로의 수는 18이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 실수 x가 등식

$$2^{2x+1}+6^x=9^x$$

을 만족시킬 때, $\dfrac{3^x-2^x}{3^x+2^x}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

9. 두 이차정사각행렬 A, B는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 행렬 $A+B$의 역행렬은 $A^{-1}+B^{-1}$이다. (나) $2AB=E$

행렬 A^2+B^2은? (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.) [3점]

① $-2E$ ② $-\frac{1}{2}E$ ③ O

④ $\frac{1}{2}E$ ⑤ $2E$

10. 지상에서 어떤 물체를 처음 속도 v(m/초)로 지면에 수직으로 쏘아 올리면 공기의 저항으로 인하여 최고점까지 상승하는 데 걸린 시간 T(초)는 다음과 같이 나타낼 수 있다고 한다.

$$T=k\log\left(1+\frac{v}{10}\right) \text{ (단, } k\text{는 0이 아닌 상수)}$$

이 물체를 처음 속도 30(m/초)로 지면에 수직으로 쏘아 올렸을 때 최고점까지 상승하는 데 걸린 시간이 T_1이면, 처음 속도 a(m/초)로 지면에 수직으로 쏘아 올렸을 때 최고점까지 상승하는 데 걸린 시간은 $2T_1$이 된다고 한다. a의 값은? [3점]

① 60 ② 90 ③ 120

④ 150 ⑤ 180

11. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{x+1} = -1, \quad \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0$$

$f(5)$의 값은? [3점]

① -24　② -20　③ -16　④ -12　⑤ -8

12. x(단, $x>0$)에 대한 방정식

$$3x^{\frac{1}{2n}} - x^{\frac{1}{n}} - 2 = 0$$

이 100보다 큰 근을 갖도록 하는 자연수 n의 최솟값은? [3점]

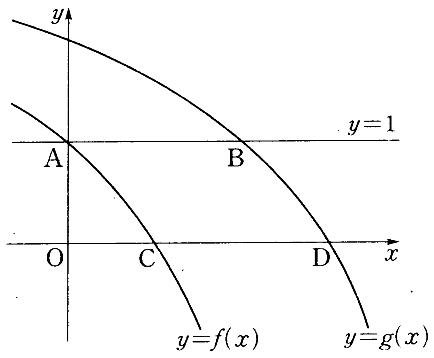
① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

13. 그림은 두 함수

$f(x)=2-2^x$,

$g(x)=\log_2(-2x+p)+q$

의 그래프를 나타낸 것이다. 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 x축과 만나는 점을 각각 C, D라 하면, 사각형 ACDB는 넓이가 2인 평행사변형이다. 두 실수 p, q의 합 $p+q$의 값은? [4점]



① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

14. $a_1=2$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{1}{2}(n+1)a_n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+1}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

15. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $\begin{cases} a_{2n-1}=2a_n-1 \\ a_{2n}=2a_n \end{cases}$ 을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음은 수열 $\left\{\frac{S_{2^n}}{2^n}\right\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

> $S_{2n}=\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n} a_{2k}=4S_n-\boxed{(가)}$
>
> $\therefore S_{2^n}=4S_{2^{n-1}}-\boxed{(나)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
>
> $\frac{S_{2^n}}{2^n}=T_n$이라 하면 $T_{n-1}=\frac{S_{2^{n-1}}}{2^{n-1}}$이므로
>
> $T_n=2T_{n-1}-\boxed{(다)}$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$
>
> 따라서 $T_1=\frac{S_2}{2}=\frac{3}{2}$이므로
>
> $T_n=2^{n-1}+\boxed{(다)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
>
> 이상에서 수열 $\left\{\frac{S_{2^n}}{2^n}\right\}$의 일반항은 $\frac{S_{2^n}}{2^n}=2^{n-1}+\boxed{(다)}$이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고 (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $af(4)g(4)$의 값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

16. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1023}{2^k}+\frac{1}{2}\right]$일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

〈보기〉

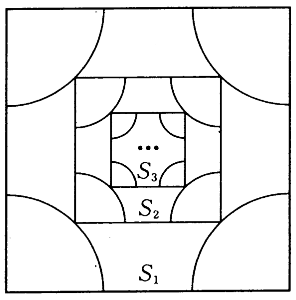
ㄱ. $a_1=512$

ㄴ. $a_{10}=a_9+1$

ㄷ. $a_m=a_{m+1}$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 11이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

17. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 S_1의 각 꼭짓점에서 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 정사각형 S_1의 한 변의 길이의 $\frac{1}{3}$이 되는 사분원을 S_1 내부에 그렸을 때, 네 개의 사분원의 호의 길이의 합을 l_1이라 하자. 정사각형 S_1의 내부에 각 사분원과 한 점에서만 만나도록 정사각형 S_2를 그리고 정사각형 S_2의 각 꼭짓점에서 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 정사각형 S_2의 한 변의 길이의 $\frac{1}{3}$이 되는 사분원을 S_2 내부에 그렸을 때, 네 개의 사분원의 호의 길이의 합을 l_2라 하자. 정사각형 S_2의 내부에 각 사분원과 한 점에서만 만나도록 정사각형 S_3을 그리고 정사각형 S_3의 각 꼭짓점에서 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 정사각형 S_3의 한 변의 길이의 $\frac{1}{3}$이 되는 사분원을 S_3 내부에 그렸을 때, 네 개의 사분원의 호의 길이의 합을 l_3이라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 n번째 생기는 네 개의 사분원의 호의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = a\pi$이다. 이때, a^2의 값은? (단, 정사각형 S_2, S_3, ⋯의 꼭짓점은 모두 정사각형 S_1의 대각선 위에 있다.) [4점]

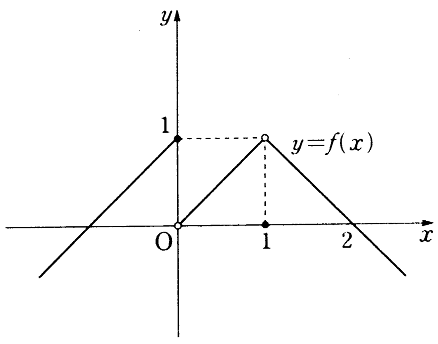


① 16　② 18　③ 20　④ 22　⑤ 24

18. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가질 때, 해의 집합을 $S(k)$라 하자. 좌표평면에서 집합 $S(k)$의 한 원소 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$와 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=1$ 위의 한 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이의 최솟값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

① $\sqrt{2}-1$　② 1　③ $\sqrt{2}$　④ $\sqrt{2}+1$　⑤ $2\sqrt{2}$

19. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



〈 보기 〉

ㄱ. $\lim_{x \to -0} f(x)=0$

ㄴ. $\lim_{x \to 1+0} f(f(x))=1$

ㄷ. 함수 $(f \circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

20. 공차가 이 아닌 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하자. 임의의 자연수 n에 대하여 $\frac{T_n}{S_n}=\frac{2n-2}{n+1}$가 성립할 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n+b_n}{a_n-b_n}$의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{5}{2}$
④ -3 ⑤ $-\frac{7}{2}$

21. 자연수를 다음 규칙대로 나열한다. (단, $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)

(가) 제1행에는 1을 나열한다.
(나) 제n행에는 n개의 수를 나열하고, 처음과 마지막에는 1을 나열한다.
(다) 제$(n+1)$행의 k번째에는 제n행의 $(k-1)$, k번째에 있는 수들의 합을 나열한다. (단, $2 \le k \le n$)

다음은 위의 규칙대로 나열된 수들의 일부분을 나타낸 것이다.

제1행							1						
제2행						1		1					
제3행					1		2		**1**				
제4행				1		3		**3**		**1**			
제5행			1		4		**6**		**4**		1		
제6행		1		5		**10**		**10**		5		1	
제7행	1		6		**15**		**20**		15		6		1
⋮					⋰		⋰ ⋮						

자연수 m에 대하여 제$(m+2)$행의 3번째 수들을 작은 것부터 차례로 나열한 수열을 $\{a_m\}$, 제$(m+3)$행의 4번째 수들을 작은 것부터 차례로 나열한 수열을 $\{b_m\}$이라 하자. 예를 들어 $a_3=6$, $b_4=20$이다. $b_{100}=b_{10}+\sum_{i=p}^{q} a_{i+1}$일 때, 두 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은? [4점]

① 100 ② 101 ③ 109 ④ 110 ⑤ 111

단답형

22. $\lim_{n \to \infty} n(\sqrt{4n^2+1}-2n)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

23. x에 대한 부등식

$$9^x-10\cdot 3^{x+1}+81<0$$

의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. [3점]

24. 첫째항과 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 세 항 a_1, a_5, a_{41}이 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이룰 때, $50r$의 값을 구하시오. [3점]

25. 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n-4)=1$을 만족시킬 때, $\lim_{n \to \infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 = \frac{q}{p}$이다. p, q가 서로소인 자연수일 때, $p+q$의 값을 구하시오. [3점]

26. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{4n-3}=a_{4n-2}=-1$
(나) $a_{4n-1}=a_{4n}=1$

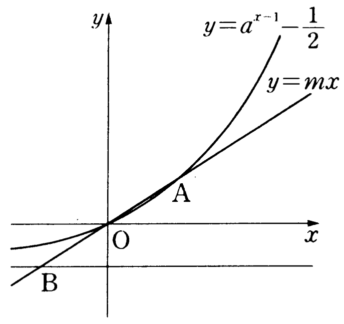
$\sum_{k=1}^{120} ka_k$의 값을 구하시오. [3점]

27. x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} \log_5(x^2-2xy+1)=0 \\ 2\log_5 x=\log_5(y+3) \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. [4점]

28. 좌표평면에서 지수함수 $y=a^{x-1}-\frac{1}{2}$의 그래프는 원점을 지나며 직선 $y=mx$와 제1사분면 위의 점 A에서 만난다. 곡선 $y=a^{x-1}-\frac{1}{2}$의 점근선과 직선 $y=mx$가 만나는 점을 B라 하면 두 점 A, B는 원점에 대하여 대칭일 때, 두 상수 a와 m에 대하여 $\frac{a^2}{m^2}$의 값을 구하시오. [4점]



29. 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+9x-a}{x^{n+1}+2}$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [4점]

30. n이 자연수일 때, $2[\log n]-\log n$의 값이 최소가 되게 하는 n의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2012년(4월) 고3 메가스터디 모의대학수학능력시험 정답 및 해설

1교시 언어 영역

1 ①	2 ③	3 ②	4 ③	5 ④
6 ②	7 ⑤	8 ①	9 ①	10 ②
11 ④	12 ④	13 ⑤	14 ②	15 ③
16 ⑤	17 ⑤	18 ④	19 ②	20 ④
21 ②	22 ①	23 ③	24 ⑤	25 ④
26 ①	27 ②	28 ④	29 ①	30 ③
31 ③	32 ⑤	33 ①	34 ③	35 ②
36 ④	37 ①	38 ③	39 ③	40 ⑤
41 ③	42 ⑤	43 ②	44 ⑤	45 ③
46 ④	47 ①	48 ⑤	49 ④	50 ⑤

2교시 수리 영역

< '가'형 >

1 ⑤	2 ④	3 ④	4 ③	5 ①
6 ⑤	7 ⑤	8 ②	9 ②	10 ④
11 ③	12 ⑤	13 ④	14 ③	15 ③
16 ④	17 ②	18 ①	19 ②	20 ④
21 ①	22 59	23 3	24 450	25 13
26 23	27 4	28 16	29 12	30 200

< '나'형 >

1 ⑤	2 ④	3 ⑤	4 ②	5 ⑤
6 ③	7 ⑤	8 ③	9 ②	10 ④
11 ①	12 ③	13 ④	14 ④	15 ③
16 ③	17 ②	18 ①	19 ⑤	20 ④
21 ③	22 5	23 10	24 450	25 13
26 120	27 3	28 16	29 7	30 9

3교시 외국어(영어) 영역

1 ⑤	2 ①	3 ①	4 ③	5 ④
6 ④	7 ③	8 ①	9 ②	10 ②
11 ⑤	12 ③	13 ⑤	14 ④	15 ⑤
16 ①	17 ④	18 ①	19 ③	20 ②
21 ⑤	22 ⑤	23 ③	24 ②	25 ③
26 ④	27 ④	28 ③	29 ⑤	30 ③
31 ②	32 ②	33 ④	34 ①	35 ③
36 ④	37 ②	38 ①	39 ④	40 ③
41 ①	42 ①	43 ④	44 ⑤	45 ③
46 ②	47 ①	48 ⑤	49 ④	50 ②

4교시 사회탐구 영역

< 윤리 >

1 ①	2 ③	3 ②	4 ④	5 ①
6 ④	7 ④	8 ③	9 ②	10 ④
11 ②	12 ②	13 ④	14 ②	15 ③
16 ③	17 ①	18 ④	19 ①	20 ①

< 국사 >

1 ①	2 ③	3 ①	4 ①	5 ②
6 ③	7 ④	8 ③	9 ⑤	10 ④
11 ④	12 ④	13 ⑤	14 ①	15 ④
16 ②	17 ④	18 ⑤	19 ②	20 ④

< 한국지리 >

1 ③	2 ③	3 ①	4 ⑤	5 ⑤
6 ①	7 ⑤	8 ①	9 ②	10 ②
11 ②	12 ③	13 ①	14 ③	15 ③
16 ⑤	17 ④	18 ⑤	19 ②	20 ⑤

< 세계지리 >

1 ①	2 ⑤	3 ②	4 ④	5 ④
6 ②	7 ⑤	8 ②	9 ②	10 ④
11 ③	12 ⑤	13 ③	14 ①	15 ②
16 ⑤	17 ④	18 ②	19 ③	20 ③

< 경제지리 >

1 ①	2 ②	3 ②	4 ④	5 ②
6 ④	7 ①	8 ③	9 ②	10 ③
11 ④	12 ⑤	13 ③	14 ③	15 ①
16 ⑤	17 ①	18 ②	19 ⑤	20 ③

< 한국근·현대사 >

1 ⑤	2 ①	3 ③	4 ④	5 ④
6 ⑤	7 ③	8 ①	9 ④	10 ②
11 ②	12 ④	13 ②	14 ④	15 ③
16 ①	17 ②	18 ②	19 ⑤	20 ②

< 세계사 >

1 ④	2 ⑤	3 ④	4 ③	5 ②
6 ④	7 ③	8 ⑤	9 ⑤	10 ①
11 ③	12 ①	13 ⑤	14 ①	15 ④
16 ①	17 ②	18 ③	19 ②	20 ⑤

< 법과 사회 >

1 ④	2 ②	3 ②	4 ③	5 ⑤
6 ②	7 ④	8 ④	9 ③	10 ②
11 ①	12 ③	13 ⑤	14 ③	15 ②
16 ④	17 ②	18 ⑤	19 ②	20 ⑤

< 정치 >

1 ④	2 ②	3 ②	4 ④	5 ③
6 ③	7 ③	8 ②	9 ③	10 ⑤
11 ④	12 ⑤	13 ①	14 ①	15 ②
16 ①	17 ②	18 ④	19 ④	20 ②

< 경제 >

1 ④	2 ④	3 ①	4 ②	5 ⑤
6 ①	7 ②	8 ④	9 ①	10 ①
11 ③	12 ④	13 ④	14 ③	15 ②
16 ③	17 ③	18 ③	19 ④	20 ①

< 사회·문화 >

1 ③	2 ②	3 ④	4 ③	5 ④
6 ④	7 ③	8 ①	9 ②	10 ①
11 ④	12 ⑤	13 ④	14 ③	15 ⑤
16 ②	17 ②	18 ②	19 ③	20 ③

4교시 과학탐구 영역

< 물리 Ⅰ >

1 ⑤	2 ②	3 ③	4 ①	5 ①
6 ⑤	7 ②	8 ③	9 ④	10 ③
11 ③	12 ①	13 ②	14 ④	15 ②
16 ④	17 ②	18 ①	19 ⑤	20 ④

< 화학 Ⅰ >

1 ②	2 ④	3 ①	4 ②	5 ④
6 ⑤	7 ②	8 ③	9 ②	10 ③
11 ⑤	12 ⑤	13 ③	14 ⑤	15 ①
16 ④	17 ⑤	18 ⑤	19 ②	20 ③

< 생물 Ⅰ >

1 ⑤	2 ②	3 ③	4 ④	5 ②
6 ③	7 ④	8 ①	9 ③	10 ②
11 ②	12 ②	13 ③	14 ⑤	15 ④
16 ①	17 ③	18 ②	19 ①	20 ⑤

< 지구과학 Ⅰ >

1 ④	2 ⑤	3 ③	4 ③	5 ①
6 ③	7 ⑤	8 ②	9 ①	10 ①
11 ④	12 ③	13 ③	14 ②	15 ③
16 ②	17 ②	18 ①	19 ①	20 ②

< 물리 Ⅱ >

1 ③	2 ②	3 ④	4 ③	5 ②
6 ①	7 ④	8 ①	9 ②	10 ②
11 ③	12 ⑤	13 ③	14 ⑤	15 ①
16 ④	17 ②	18 ①	19 ⑤	20 ①

< 화학 Ⅱ >

1 ③	2 ②	3 ①	4 ⑤	5 ①
6 ③	7 ⑤	8 ④	9 ③	10 ②
11 ①	12 ④	13 ③	14 ④	15 ②
16 ②	17 ④	18 ③	19 ①	20 ④

< 생물 Ⅱ >

1 ②	2 ⑤	3 ⑤	4 ③	5 ③
6 ②	7 ⑤	8 ④	9 ②	10 ②
11 ③	12 ①	13 ④	14 ③	15 ④
16 ③	17 ②	18 ⑤	19 ④	20 ⑤

< 지구과학 Ⅱ >

1 ⑤	2 ④	3 ⑤	4 ④	5 ③
6 ②	7 ③	8 ①	9 ③	10 ③
11 ①	12 ①	13 ③	14 ①	15 ③
16 ②	17 ②	18 ⑤	19 ②	20 ③

2교시 수리 영역

< '가' 형 >

1. 로그 답⑤

$$\log_8 24-\frac{1}{\log_6 8}=\log_8 24-\log_8 6$$
$$=\log_8\frac{24}{6}$$
$$=\log_8 4$$
$$=\frac{2}{3}$$

2. 행렬의 연산 답④

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=E$$

이므로

$A^3=A^2A=A$

따라서 행렬 A^3의 모든 성분의 합은 1이다.

3. 삼각함수 답④

$$a^2+b^2=(\sin\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\beta+\cos\alpha)^2$$
$$=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\beta+2\sin\beta\cos\alpha+\cos^2\alpha$$
$$=2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$
$$=2+2\sin(\alpha+\beta)$$
$$\le 2+2$$
$$=4$$

따라서 구하는 최댓값은 4이다.

4. 무리방정식 답③

$\sqrt{2^x+5}-1=\sqrt{8-2^x}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$2^x-1=\sqrt{2^x+5}$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$(2^x)^2-3\cdot 2^x-4=0$

$(2^x+1)(2^x-4)=0$

$\therefore 2^x=4\ (\because 1\le 2^x\le 8)$

따라서 $a=2$이므로 ③이 옳다.

5. 미분법 답①

$$\frac{dx}{dt}=4-4\cos t,\ \frac{dy}{dt}=4\sin t$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$=\frac{4\sin t}{4-4\cos t}$$
$$=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

따라서 $t=\frac{5}{6}\pi$에서 주어진 곡선의 접선의 기울기 m은

$$m=\frac{\sin\frac{5}{6}\pi}{1-\cos\frac{5}{6}\pi}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$
$$=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$
$$=2-\sqrt{3}$$

6. 함수의 연속성 답⑤

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{b-\cos^2 x}{3x\ln(1+4x)}=a$$

$x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이므로

(분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $b-\cos^2 0=0$

$\therefore b=1$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{3x\ln(1+4x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin^2 x}{3x^2\ln(1+4x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\times\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{4x}{\ln(1+4x)}\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{12}$$
$$=a$$
$$\therefore \frac{1}{a}+b=12+1=13$$

7. 행렬과 그래프 답⑤

각 꼭짓점에서 두 개의 변을 지나 자신으로 오는 경로의 수가 각각 3, 2, 2, 3, 2이므로 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 각각 3, 2, 2, 3, 2이다.

ㄱ. 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 최댓값은 3이다. (참)

ㄴ. 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합이 12이므로 모든 변의 개수는 $\frac{12}{2}=6$이다. (참)

ㄷ. 각 꼭짓점에서 두 개의 변을 지나 자신이 아닌 다른 꼭짓점으로 가는 모든 경로의 수는 행렬 A^2에서 $(i,\ i)$ 성분 $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$을 제외한 성분이므로 그 합은 $3+2+2+2+2+3+2+2=18$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

8. 역함수의 미분법 답②

$f(1)=4$에서 $g(4)=1$이고

$$g'(4)=\frac{1}{f'(g(4))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}\text{이다.}$$

$\log_2 g(x)=h(x)$로 놓으면

$h(4)=\log_2 g(4)=\log_2 1=0$이므로

$$\lim_{x\to 4}\frac{\log_2 g(x)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{h(x)-h(4)}{x-4}$$
$$=h'(4)$$

한편 $h'(x)=\frac{1}{\ln 2}\times\frac{g'(x)}{g(x)}$이므로

$$h'(4)=\frac{1}{\ln 2}\times\frac{\frac{1}{4}}{1}$$
$$=\frac{1}{4\ln 2}$$

9. 역행렬 답②

(가)에서 행렬 $A+B$의 역행렬은 $A^{-1}+B^{-1}$이므로

$(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=E$

$AA^{-1}+AB^{-1}+BA^{-1}+BB^{-1}=E$

$\therefore AB^{-1}+BA^{-1}=-E$ …… ㉠

(나)에서 $B^{-1}=2A,\ A^{-1}=2B$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2A^2+2B^2=-E$

$\therefore A^2+B^2=-\frac{1}{2}E$

10. 로그함수 답④

조건에 의해

$T_1=k\log\left(1+\frac{30}{10}\right)=k\log 4$ …… ㉠

$2T_1=k\log\left(1+\frac{a}{10}\right)$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2k\log 4=k\log\left(1+\frac{a}{10}\right)$

로그의 성질에 의해

$16=1+\frac{a}{10}$

$\therefore a=150$

11. 정적분 답③

$x<0$일 때, $e^x<1$이므로

$$e^x*1=\begin{cases}e^x+1 & (x<0)\\ 2e^x & (x\ge 0)\end{cases}$$
$$\therefore \int_{-1}^{1}(e^x*1)dx=\int_{-1}^{0}(e^x+1)dx+\int_{0}^{1}2e^x dx$$
$$=\left[e^x+x\right]_{-1}^{0}+\left[2e^x\right]_{0}^{1}$$
$$=1-\frac{1}{e}+1+2e-2$$
$$=2e-\frac{1}{e}$$

12. 여러 가지 함수의 미분법 답⑤

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-4\left\{f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2}$$
$$=\sqrt{1-4\times\frac{3}{16}}=\frac{1}{2}$$

$f''(x)=\dfrac{-8f(x)f'(x)}{2\sqrt{1-4\{f(x)\}^2}}$ 이므로

$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{-8f\left(\frac{\pi}{6}\right)f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2\sqrt{1-4\left\{f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2}}$

$=\dfrac{-8\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2}}{2\sqrt{1-4\times\frac{3}{16}}}$

$=-\sqrt{3}$

13. 로그함수와 그래프 답④

평행사변형 ACDB의 넓이는 2, 높이는 1이므로

$\overline{AB}=\overline{CD}=2$

$\therefore B(2,\ 1)$

또, $f(x)=2-2^x=0$에서 $x=1$이므로

$C(1,\ 0),\ D(3,\ 0)$

점 B, D가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$1=\log_2(-4+p)+q$ …… ㉠

$0=\log_2(-6+p)+q$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$1=\log_2(-4+p)-\log_2(-6+p)$

$1=\log_2\dfrac{-4+p}{-6+p}$

$2=\dfrac{-4+p}{-6+p}$

$p=8,\ q=-1$

$\therefore p+q=7$

14. 함수의 극한 답③

$\angle AOP=2\theta$라 하면 직선 OP의 기울기는 $\dfrac{\sin 2t}{t}$이므로 $\tan 2\theta=\dfrac{\sin 2t}{t}$이고 $m(t)=\tan\theta$이다.

이때, $\lim\limits_{t\to+0}\tan 2\theta=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\sin 2t}{t}=2$이다.

한편 $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$에서 $\tan\theta=y$라 하고 주어진 식을 y에 대해 정리하면

$y^2\tan 2\theta+2y-\tan 2\theta=0$

$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 2\theta}}{\tan 2\theta}$

그런데 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $y>0$ 이므로

$y=\dfrac{-1+\sqrt{1+\tan^2 2\theta}}{\tan 2\theta}$

따라서

$\lim\limits_{t\to+0}m(t)=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{-1+\sqrt{1+\tan^2 2\theta}}{\tan 2\theta}$

$=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

15. 수열 Ⓜ 답③

$a_{2n-1}=2a_n-1$에서 $n=1$이면

$a_1=2a_1-1$

$\therefore a_1=1$

$S_{2n}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k-1}+\sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}(2a_k-1)+\sum\limits_{k=1}^{n}2a_k$

$=2\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-n+2\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$

$=4S_n-\boxed{n}$ …… ㉠

㉠에 n 대신에 2^{n-1}을 대입하면

$S_{2^n}=4S_{2^{n-1}}-\boxed{2^{n-1}}$ …… ㉡

$\dfrac{S_{2^n}}{2^n}=T_n$이라 하면

$T_{n-1}=\dfrac{S_{2^{n-1}}}{2^{n-1}}$,

$T_1=\dfrac{S_2}{2}=\dfrac{a_1+a_2}{2}=\dfrac{a_1+2a_1}{2}=\dfrac{3}{2}$

㉡의 양변을 2^n으로 나누면

$\dfrac{S_{2^n}}{2^n}=4\cdot\dfrac{S_{2^{n-1}}}{2^n}-\dfrac{1}{2}$

$=2\cdot\dfrac{S_{2^{n-1}}}{2^{n-1}}-\dfrac{1}{2}$

$=2T_{n-1}-\dfrac{1}{2}$

$\therefore T_n=2T_{n-1}-\boxed{\frac{1}{2}}$

즉, $T_n-\frac{1}{2}=2\left(T_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$이므로

$T_n-\frac{1}{2}=\left(T_1-\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$

$\therefore T_n=2^{n-1}+\frac{1}{2}$

이상에서 $f(n)=n,\ g(n)=2^{n-1},\ a=\frac{1}{2}$이므로

$af(4)g(4)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2^3=16$

16. 방정식 답④

$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}^2+\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$에서

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ 또는 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$

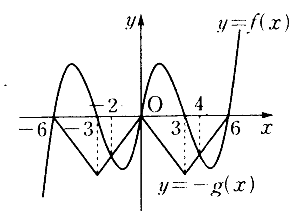
(i) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$일 때, $f(x)=0,\ g(x)\neq 0$이므로

$x=-3$ 또는 $x=3$

(ii) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$일 때, $f(x)=-g(x),\ g(x)\neq 0$

이므로 다음 그림에서

$x=-2$ 또는 $x=4$



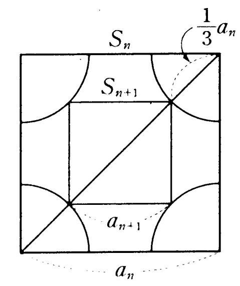
이상에서 $a=4,\ b=2$이므로

$a+b=6$

17. 무한등비급수 답②

정사각형 S_n의 한 변의 길이를 a_n, 정사각형 S_n에 생기는 네 개의 사분원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$r_1=1$이므로 $l_1=2\pi$이다.



정사각형 S_n의 대각선에서

$\sqrt{2}a_n=2r_n+\sqrt{2}a_{n+1}$

이때, $r_n=\frac{1}{3}a_n$이므로

$\sqrt{2}a_n=\frac{2}{3}a_n+\sqrt{2}a_{n+1}$

즉, $a_{n+1}=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 공비가 $1-\frac{\sqrt{2}}{3}$이므로 수열 $\{l_n\}$의 공비도 $1-\frac{\sqrt{2}}{3}$이다.

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}l_n=\dfrac{2\pi}{1-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)}$

$=\dfrac{6\pi}{\sqrt{2}}$

$=3\sqrt{2}\pi$

$\therefore a^2=(3\sqrt{2})^2=18$

18. 역행렬 답①

$\begin{pmatrix}k&1\\1&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}k-1&1\\1&k-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ …… ㉠

㉠이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지므로

$(k-1)^2-1=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=2$

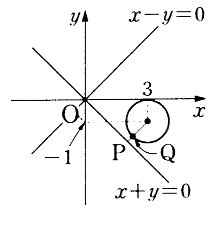
(i) $k=0$일 때, ㉠은 $\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이므로

$x-y=0$, 즉 주어진 연립방정식의 모든 해는 직선 $x-y=0$ 위에 있다.

(ii) $k=2$일 때, ㉠은 $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이므로

$x+y=0$, 즉 주어진 연립방정식의 모든 해는 직선 $x+y=0$ 위에 있다.

다음 그림에서 선분 PQ의 길이가 최소일 때는 원의 중심에서 직선 $x+y=0$에 내린 수선의 발이 점 P, 수선과 원의 교점이 점 Q일 때이다.



따라서 점 $(3,\ -1)$과 직선 $x+y=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$이므로 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}-1$이다.

19. 삼각방정식 답②

$\cos 4x+\cos 2x=2\cos 3x\cos x$이므로

주어진 방정식은

$4\cos 3x\cos x-2(\cos 3x+\cos x)+1=0$

$(2\cos 3x-1)(2\cos x-1)=0$

$\cos 3x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

(i) $\cos 3x=\frac{1}{2}$일 때, $0<3x<3\pi$이므로

$3x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $3x=\frac{5\pi}{3}$ 또는 $3x=\frac{7\pi}{3}$

$\therefore x=\frac{\pi}{9}$ 또는 $x=\frac{5\pi}{9}$ 또는 $x=\frac{7\pi}{9}$

(ii) $\cos x=\frac{1}{2}$일 때, $x=\frac{\pi}{3}$

이상에서 구하는 해의 개수는 4이다.

20. 무한수열의 극한 Ⓜ 답④

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 등차수열이므로 상수 k에 대하여 $S_n=kn(n+1)$, $T_n=2kn(n-1)$로 놓을 수 있다.

$n\ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=kn(n+1)-k(n-1)n$

$=2kn$

$b_n=T_n-T_{n-1}$

$=2kn(n-1)-2k(n-1)(n-2)$

$=4k(n-1)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{a_n-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2kn+4kn-4k}{2kn-4kn+4k}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{6kn-4k}{-2kn+4k}$

$=-3$

참고 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 상수항이 없는 n에 관한 이차식으로 나타난다.

즉, $S_n=an^2+bn$ (a, b는 상수)

21. 정적분 답①

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{n}\cdot\frac{kx}{n}\cos\frac{kx}{n}\right)$

$=\int_0^x t\cos t\,dt$

$=\Big[t\sin t\Big]_0^x-\int_0^x \sin t\,dt$

$=x\sin x+\Big[\cos t\Big]_0^x$

$=x\sin x+\cos x-1$

$\therefore f(\pi)=0+(-1)-1=-2$

22. 부등식 답59

(i) $x^2-12x+32=(x-4)(x-8)\ge 0$

$\therefore x\le 4$ 또는 $x\ge 8$

(ii) $\frac{x-12}{x-1}\le 0$에서

$(x-1)(x-12)\le 0,\ x\ne 1$

$\therefore 1<x\le 12$

(i), (ii)에서

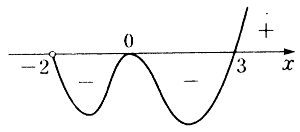
$1<x\le 4$ 또는 $8\le x\le 12$

따라서 구하는 모든 정수 x의 값의 합은

$2+3+4+8+9+10+11+12=59$이다.

23. 정적분 답3

$f'(x)=x^4-x^3-6x^2=x^2(x+2)(x-3)$이므로 함수 $f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이자 최소이다.

$\therefore a=3$

24. 여러 가지 수열 답450

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5=a_1+4d$, $a_{41}=a_1+40d$이므로

$a_5^2=a_1a_{41}$에서

$(a_1+4d)^2=a_1(a_1+40d)$

정리하면 $32a_1d=16d^2$

이때, $d\ne 0$이므로 $d=2a_1$

$\therefore r=\frac{a_5}{a_1}=\frac{a_1+4d}{a_1}$

$=\frac{a_1+8a_1}{a_1}$

$=9$

$\therefore 50r=450$

25. 무한급수의 이해 답13

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n-4)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n-4)=0$이다.

$2a_n+3b_n=c_n$으로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}c_n=4$이고, $b_n=\frac{c_n-2a_n}{3}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_n-2a_n}{3a_n}\right)^2$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{c_n}{a_n}-2}{3}\right)^2$

$=\frac{4}{9}$

$\therefore p+q=9+4=13$

26. 정적분 답23

$f(x)=ax+b$로 놓으면 $f(2)=2a+b=8$ ...... ㉠

$\int_{-2}^{2}(3x^2+1)(ax+b)dx$

$=\int_{-2}^{2}(3ax^3+3bx^2+ax+b)dx$

$=2\int_0^2(3bx^2+b)dx$

$=2\Big[bx^3+bx\Big]_0^2$

$=20b=-40$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$b=-2$, $a=5$

따라서 $f(x)=5x-2$이므로

$f(5)=5\times 5-2=23$

27. 미분계수 답4

$f'(x)=2e^{2x-4}$이고

$\frac{2n+3}{n+2}=2-\frac{1}{n+2}$, $\frac{2n+1}{n+2}=2-\frac{3}{n+2}$

$\frac{1}{n+2}=t$로 치환하면 $n\to\infty$일 때 $t\to +0$이고

$n=\frac{1}{t}-2=\frac{1-2t}{t}$이므로

$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)-f\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)\right\}$

$=\lim_{t\to+0}\frac{1-2t}{t}\{f(2-t)-f(2-3t)\}$

$=\lim_{t\to+0}\frac{1-2t}{t}\{f(2-t)-f(2)+f(2)-f(2-3t)\}$

$=\lim_{t\to+0}(1-2t)\left\{\frac{f(2-t)-f(2)}{-t}\times(-1)\right.$

$\left.-\frac{f(2-3t)-f(2)}{-3t}\times(-3)\right\}$

$=1\times\{-f'(2)+3f'(2)\}$

$=2f'(2)$

$=2\times 2e^0=4$

다른풀이

$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)-f\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}n\left(e^{2\cdot\frac{2n+3}{n+2}-4}-e^{2\cdot\frac{2n+1}{n+2}-4}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}n\left(e^{\frac{-2}{n+2}}-e^{\frac{-6}{n+2}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(e^{\frac{-2}{n+2}}-1\right)-\left(e^{\frac{-6}{n+2}}-1\right)}{\frac{1}{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{-2}{n+2}}-1}{\frac{-2}{n+2}\cdot\frac{n+2}{-2n}}-\frac{e^{\frac{-6}{n+2}}-1}{\frac{-6}{n+2}\cdot\frac{n+2}{-6n}}$

여기서 $n\to\infty$이면

$\frac{-2}{n+2}\to 0$, $\frac{-6}{n+2}\to 0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{-2}{n+2}}-1}{\frac{-2}{n+2}}=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{-6}{n+2}}-1}{\frac{-6}{n+2}}=1$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{1}{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{-\frac{1}{6}}$

$=-2+6$

$=4$

28. 지수함수 답16

지수함수 $y=a^{x-1}-\frac{1}{2}$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=a^{-1}-\frac{1}{2}$에서 $a=2$

또 곡선 $y=2^{x-1}-\frac{1}{2}$의 점근선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}$

이므로 점 B의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2m},\ -\frac{1}{2}\right)$

두 점 A, B는 원점에 대하여 대칭이므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{1}{2m},\ \frac{1}{2}\right)$

점 A는 곡선 $y=2^{x-1}-\frac{1}{2}$ 위의 점이므로

$2^{\frac{1}{2m}-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$에서 $m=\frac{1}{2}$이다.

$\therefore \frac{a^2}{m^2}=\frac{4}{\frac{1}{4}}=16$

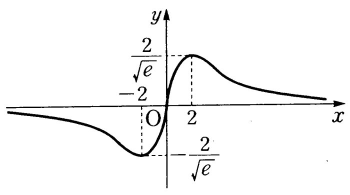
29. 도함수의 활용 답 12

$f(x)=xe^{-\frac{1}{8}x^2}$에서

$f'(x)=e^{-\frac{1}{8}x^2}-\frac{1}{4}x^2e^{-\frac{1}{8}x^2}=\frac{1}{4}(4-x^2)e^{-\frac{1}{8}x^2}$이므로

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-2e^{-\frac{1}{2}}$	↗	$2e^{-\frac{1}{2}}$	↘

또 $x\to\infty$일 때 $f(x)\to+0$이고, $x\to-\infty$일 때 $f(x)\to-0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



한편 함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 10만큼 평행이동시킨 그래프이므로 구간 $[-a,\ a]$에서 $M+m=0$이 성립하려면 구간 $[-a,\ a]$에 함수 $g(x)$의 최댓값이 포함되어야 한다.

즉, $a\geq12$이므로 양수 a의 최솟값은 12이다.

30. 삼각함수 Ⓜ 답 200

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}$$
$$=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}$$
$$=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

이므로

$$\cos a_n=\frac{1-\tan^2\frac{a_n}{2}}{1+\tan^2\frac{a_n}{2}}$$
$$=\frac{1-\frac{n}{n+2}}{1+\frac{n}{n+2}}$$
$$=\frac{(n+2)-n}{(n+2)+n}$$
$$=\frac{2}{2n+2}$$
$$=\frac{1}{n+1}$$

$\therefore \cos a_{2n+1}=\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2(n+1)}$

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{\cos a_n}{\cos a_{2n+1}}=\frac{2(n+1)}{n+1}=2$

$\therefore \sum_{n=1}^{100}\frac{\cos a_n}{\cos a_{2n+1}}=2\cdot100=200$

<'나'형>

[1~2] **'가' 형과 동일**

3. 지수 답⑤

세 수는 모두 양수이므로 세 수를 모두 12제곱하면

$A^{12}=4^4=256$

$B^{12}=6^3=216$

$C^{12}=12^2=144$

따라서 $C^{12}<B^{12}<A^{12}$이므로

$C<B<A$

4. 수열 답②

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a_1}=1$, 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이므로

$\frac{1}{a_n}=1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$

$\therefore a_n=\frac{2}{n+1}$

$\therefore a_9=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

5. 함수의 연속 답⑤

$x\neq0$일 때, $0<\frac{1}{1+x^2}<1$이므로

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2012x^2\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{2012x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}$$
$$=2012(1+x^2)$$

$x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이어야 하므로

$\lim_{x\to0}2012(1+x^2)=a$

$\therefore a=2012$

6. 행렬 답③

(가)에서 $B=-A$이므로

$AB=A(-A)=-A^2=E$

$\therefore A^2=-E,\ A^4=E$

같은 방법으로 $B^2=-E,\ B^4=E$이므로

$(A+B)+(A^2+B^2)+(A^3+B^3)+(A^4+B^4)$

$=(A+B)+(-E-E)+(-A-B)+(E+E)$

$=O$

$\therefore$ (주어진 식)$=503\times O+(A^{2013}+B^{2013})$

$=A+B$

$=O$

7. '가' 형과 동일

8. 지수방정식 답③

$2^x=a$, $3^x=b$라 하면 주어진 등식은

$2a^2+ab=b^2$

$2a^2+ab-b^2=0$

$(2a-b)(a+b)=0$

$a>0$, $b>0$이므로

$2a-b=0$, 즉 $2a=b$

$\therefore 2\cdot 2^x=3^x$

$\therefore \dfrac{3^x-2^x}{3^x+2^x}=\dfrac{2\cdot 2^x-2^x}{2\cdot 2^x+2^x}$

$=\dfrac{2^x}{3\cdot 2^x}$

$=\dfrac{1}{3}$

[9~10] '가' 형과 동일

11. 함수의 극한 답①

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{x+1}=-1$에서 $f(-1)=0$이고,

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$에서 $f(1)=0$이므로 상수 a, b에 대하여 $f(x)=(ax+b)(x-1)(x+1)$이라 하면

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}(x-1)(ax+b)$

$=-2(-a+b)$

$=-1$

에서 $-a+b=\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

또, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)(ax+b)$

$=2(a+b)$

$=0$

에서 $a+b=0$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서

$a=-\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{4}$이므로

$f(x)=-\dfrac{1}{4}(x+1)(x-1)^2$

$\therefore f(5)=-\dfrac{1}{4}\cdot6\cdot16=-24$

12. 지수함수 답③

$x^{\frac{1}{2n}}=X$라 하면 $X>0$이고 주어진 방정식은

$X^2-3X+2=0$

$(X-1)(X-2)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=2$

$x^{\frac{1}{2n}}=1$에서 $x=1$

$x^{\frac{1}{2n}}=2$에서 $x=2^{2n}=4^n$

이때, $4^3=64$, $4^4=256$이므로 $4^n>100$을 만족시키는 n의 최솟값은 4이다.

13. '가' 형과 동일

14. 수열의 극한 답④

주어진 조건에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\dfrac{1}{2}(n+1)a_n$ …… ㉠

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(n+2)a_{n+1}$ …… ㉡

이므로 ㉡−㉠을 계산하면

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(n+2)a_{n+1}-\dfrac{1}{2}(n+1)a_n$

즉, $na_{n+1}=(n+1)a_n$이므로 이 식의 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}=\cdots=\dfrac{a_2}{2}=\dfrac{a_1}{1}=2$

$\therefore a_n=2n$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+1}$

$=2$

다른풀이

$a_1=a_1$ $\quad\therefore a_1=2$

$a_1+a_2=\dfrac{3}{2}a_2$ $\quad\therefore a_2=4$

$a_1+a_2+a_3=2a_3$ $\quad\therefore a_3=6$

$a_1+a_2+a_3+a_4=\dfrac{5}{2}a_4$ $\quad\therefore a_4=8$

⋮

$\therefore a_n=2n$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+1}=2$

15. '가' 형과 동일 Ⓜ

16. 여러 가지 수열 답③

ㄱ. $a_1=\sum\limits_{k=1}^{1}\left[\dfrac{1023}{2^k}+\dfrac{1}{2}\right]$

$=\left[\dfrac{2^{10}-1}{2}+\dfrac{1}{2}\right]$

$=[2^9]=2^9$

$=512$ (참)

ㄴ. $a_2=\sum\limits_{k=1}^{2}\left[\dfrac{1023}{2^k}+\dfrac{1}{2}\right]$

$=a_1+\left[\dfrac{2^{10}-1}{2^2}+\dfrac{1}{2}\right]$

$=a_1+\left[2^8-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2}\right]$

$=a_1+2^8$

$a_3=\sum\limits_{k=1}^{3}\left[\dfrac{1023}{2^k}+\dfrac{1}{2}\right]$

$=a_2+\left[\dfrac{2^{10}-1}{2^3}+\dfrac{1}{2}\right]$

$=a_2+\left[2^7-\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2}\right]$

$=a_2+2^7$

⋮

$a_{10}=\sum\limits_{k=1}^{10}\left[\dfrac{1023}{2^k}+\dfrac{1}{2}\right]$

$=a_9+\left[\dfrac{2^{10}-1}{2^{10}}+\dfrac{1}{2}\right]$

$=a_9+\left[1-\dfrac{1}{2^{10}}+\dfrac{1}{2}\right]$

$=a_9+1$ (참)

ㄷ. $a_{11}=\sum\limits_{k=1}^{11}\left[\dfrac{1023}{2^k}+\dfrac{1}{2}\right]$

$=a_{10}+\left[\dfrac{2^{10}-1}{2^{11}}+\dfrac{1}{2}\right]$

$=a_{10}+0$

$=a_{10}$

$a_{12}=a_{10}$

⋮

따라서 $a_{10}=a_{11}=a_{12}=\cdots$이므로 $a_m=a_{m+1}$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 10이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[17~18] '가' 형과 동일

19. 함수의 연속 답⑤

ㄱ. $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=1$ (거짓)

ㄴ. $x\to1+0$일 때, $f(x)\to1-0$이므로

$\lim\limits_{x\to1+0}f(f(x))=\lim\limits_{t\to1-0}f(t)=1$ (참)

ㄷ. $(f\circ f)(1)=f(0)=1$이고

$\lim\limits_{x\to1-0}f(f(x))=\lim\limits_{t\to1-0}f(t)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to1}(f\circ f)(x)=(f\circ f)(1)$ ($\because$ ㄴ)

따라서 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

20. '가' 형과 동일 Ⓜ

21. 여러 가지 수열 답③

나열되는 수들의 규칙에 의해 b_1, b_2, b_3, b_4, …의 계차수열은 a_2, a_3, a_4, …이다.

따라서 $b_m=b_1+\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_{i+1}$ $(m\geq2)$이 성립한다.

$\therefore b_{100}=b_1+\sum\limits_{i=1}^{99}a_{i+1}=b_{10}+\sum\limits_{i=10}^{99}a_{i+1}$

$\therefore p+q=10+99=109$

참고 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이 $\{b_n\}$일 때,

$a_n=a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}b_k$

$=a_m+\sum\limits_{k=m}^{n-1}b_k$ $(1\leq m\leq n-1)$

이 성립한다.

22. 무한수열의 극한 답5

분자를 유리화하면

$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{4n^2+1}-2n)=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{4n^2+1-4n^2}{\sqrt{4n^2+1}+2n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}+2}$

$=\dfrac{1}{4}$

$\therefore p+q=4+1=5$

23. 지수함수 답 10

$9^x-10\cdot 3^{x+1}+81<0$에서 $3^x=X$라 하면

$X^2-30X+81<0$

$(X-3)(X-27)<0$

$\therefore 3<X<27$

$3<3^x<3^3$에서 $1<x<3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=1^2+3^2=10$

[24~25] '가' 형과 동일

26. 여러 가지 수열 답 120

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 나열하면

$-1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ \cdots$

이므로 수열 $\{na_n\}$의 각 항을 나열하면 다음과 같다.

$-1,\ -2,\ 3,\ 4,\ -5,\ -6,\ 7,\ 8,\ -9,\ -10,\ 11,\ 12,\ \cdots$

따라서 $\sum_{k=1}^{4} ka_k=\sum_{k=5}^{8} ka_k=\sum_{k=9}^{12} ka_k=\cdots$

$=\sum_{k=4l-3}^{4l} ka_k=4$

가 성립한다. (단, $l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

$\therefore \sum_{k=1}^{120} ka_k=\frac{120}{4}\cdot 4$

$=120$

27. 로그함수 답 3

$\log_5(x^2-2xy+1)=0$에서

$x^2-2xy+1=1$

$x(x-2y)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2y$

그런데 $x>0$이므로 $x=2y$

이것을 $2\log_5 x=\log_5(y+3)$에 대입하면

$\log_5 4y^2=\log_5(y+3)$

$4y^2=y+3$

$4y^2-y-3=0$

$(y-1)(4y+3)=0$

$\therefore y=1\ (\because y>0),\ x=2$

$\therefore \alpha+\beta=2+1=3$

28. '가' 형과 동일

29. 함수의 연속 답 7

$x>1$일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{9x-a}{x^n}}{x+\dfrac{2}{x^n}}=\dfrac{1}{x}$

$x=1$일 때, $f(1)=\dfrac{10-a}{3}$

$0<x<1$일 때, $f(x)=\dfrac{9x-a}{2}$

따라서 $x=1$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\dfrac{9-a}{2}=1=\dfrac{10-a}{3}$

$\therefore a=7$

30. 로그 Ⓜ 답 9

$\log n$의 지표와 가수를 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하면

$f(n)=[\log n]$, $f(n)+g(n)=\log n$이므로

$2[\log n]-\log n=f(n)-g(n)$이다.

여기서

$1\le n<10$이면 $f(n)=0$, $0\le g(n)<1$이므로

$f(n)-g(n)\le 0$

$n\ge 10$이면 $f(n)\ge 1$, $0\le g(n)<1$이므로

$f(n)-g(n)>0$

따라서 $n=9$일 때, $f(n)-g(n)$, 즉

$2[\log n]-\log n$은 최솟값 $-\log 9$를 갖는다.