[2] 동하중을 받는 축

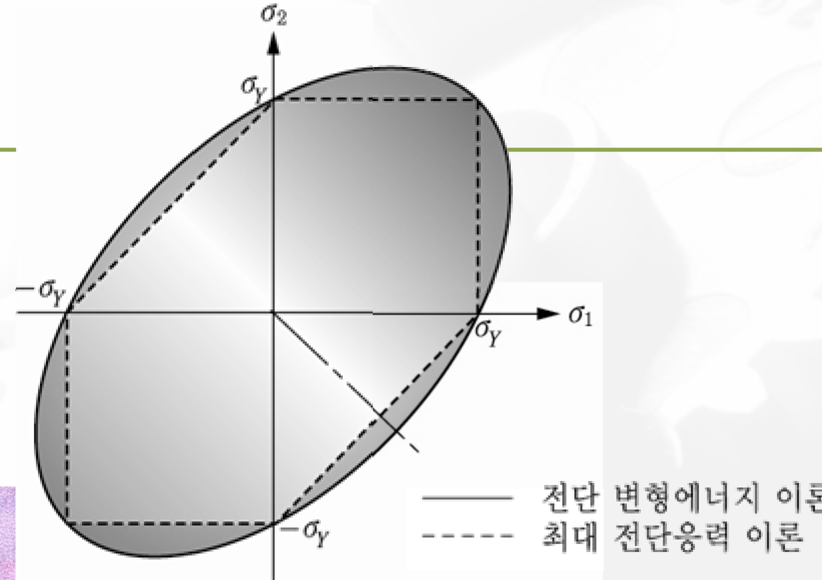
- **굽힘 모멘트와 비틀림 모멘트를 동시에 받는 축**
  - ✓ 굽힘 모멘트의 방향이 일정한 경우 ➔ 굽힘 응력 : $+\sigma_b \sim -\sigma_b$
  - ✓ 비틀림 모멘트의 크기와 방향이 일정한 경우 ➔ 브틀림 응력 : $+\tau \sim -\tau$

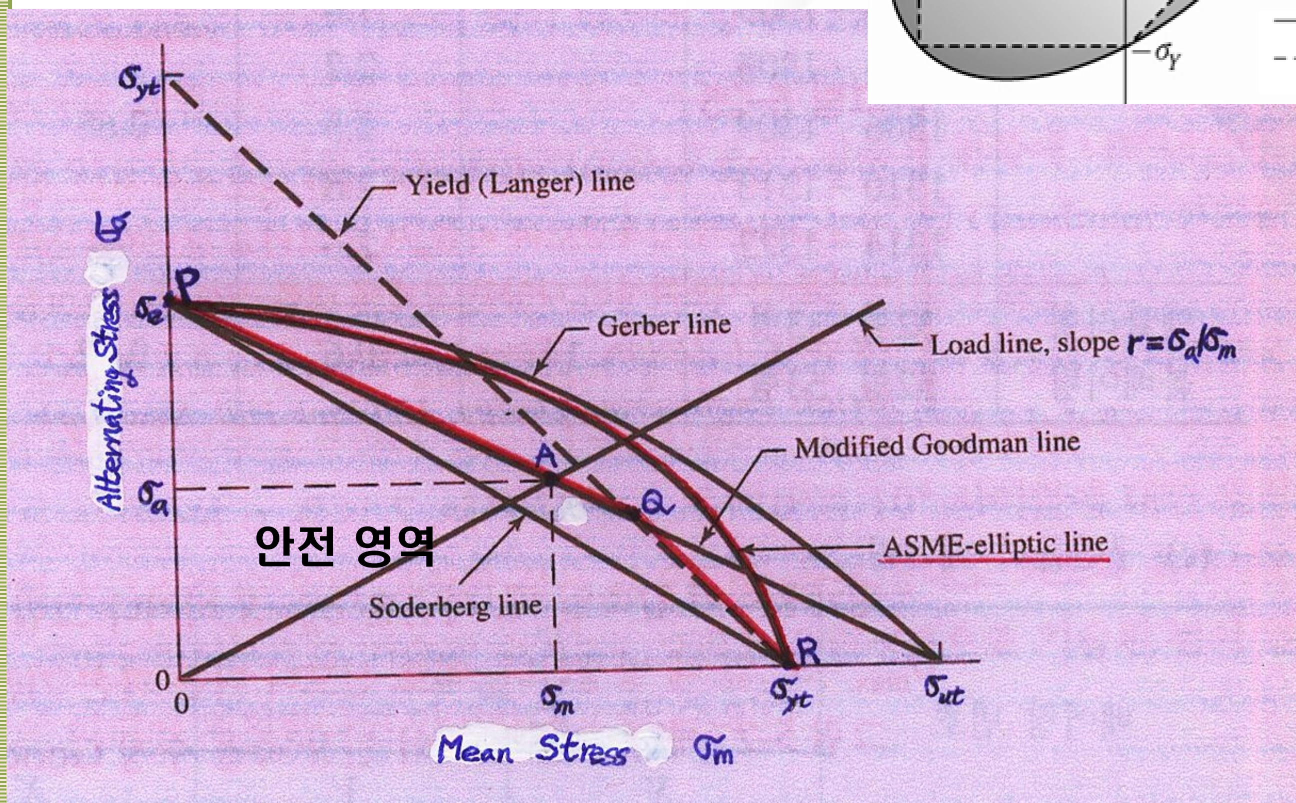
평균 모멘트 및 토크	교번 모멘트 및 토크
$M_m = \frac{1}{2}(M_{\max} + M_{\min})$ $T_m = \frac{1}{2}(T_{\max} + T_{\min})$	$M_a = \frac{1}{2}(M_{\max} - M_{\min})$ $T_a = \frac{1}{2}(T_{\max} - T_{\min})$

평균 응력	교번 응력
$\sigma_{bm} = \frac{32M_m}{\pi d^3}$ $\quad \tau_m = \frac{16T_m}{\pi d^3}$	$\sigma_{ba} = \frac{32M_a}{\pi d^3}$ $\quad \tau_a = \frac{16T_a}{\pi d^3}$

4.1 축

[2] 동하중을 받는 축





4.1 축

✓ **ASME 파손기준에 의한 축 지름**

최대전단응력식 적용	von Mises 상당응력식 적용
[최대전단응력] $\tau_{max} = \left[\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2}$ 평균 응력, 교번 응력 $(\tau_{max})_m = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{bm}}{2}\right)^2 + \tau_m^2} = \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{M_m^2 + T_m^2} = \frac{\sigma_m'}{2}$ $(\tau_{max})_a = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{ba}}{2}\right)^2 + \tau_a^2} = \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{M_a^2 + T_a^2} = \frac{\sigma_a'}{2}$	[von Mises 상당응력] $\sigma_{VM} = \left[\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2\right]^{1/2}$ 평균 응력, 교번 응력 $\sigma_m' = \sqrt{\sigma_{bm}^2 + 3\tau_m^2} = \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{4M_m^2 + 3T_m^2}$ $\sigma_a' = \sqrt{\sigma_{ba}^2 + 3\tau_a^2} = \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{4M_a^2 + 3T_a^2}$
$\sigma_m' = \frac{32}{\pi d^3}\sqrt{M_m^2 + T_m^2}$ $\quad \sigma_a' = \frac{32}{\pi d^3}\sqrt{M_a^2 + T_a^2}$	$\sigma_m' = \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{4M_m^2 + 3T_m^2}$ $\quad \sigma_a' = \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{4M_a^2 + 3T_a^2}$

[ASME 파손기준] $\left(\frac{S\sigma_a'}{\sigma_e}\right)^2 + \left(\frac{S\sigma_m'}{\sigma_Y}\right)^2 = 1$

최대전단응력	$d = \left[\frac{32S}{\pi}\sqrt{\left(\frac{M_a}{\sigma_e}\right)^2 + \left(\frac{T_a}{\sigma_e}\right)^2 + \left(\frac{M_m}{\sigma_Y}\right)^2 + \left(\frac{T_m}{\sigma_Y}\right)^2}\right]^{1/3}$
von Mises 상당응력	$d = \left[\frac{32S}{\pi}\sqrt{\left(\frac{M_a}{\sigma_e}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{T_a}{\sigma_e}\right)^2 + \left(\frac{M_m}{\sigma_Y}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{T_m}{\sigma_Y}\right)^2}\right]^{1/3}$

➢ 균일하중 상태에서 축이 회전

➔ 완전 역전 굽힘응력(σ_{ba})과 비틀림 평균응력(τ_m)만 작용

➔ $M = M_{\max} = -M_{\min}$

$T = T_{\max} = T_{\min}$

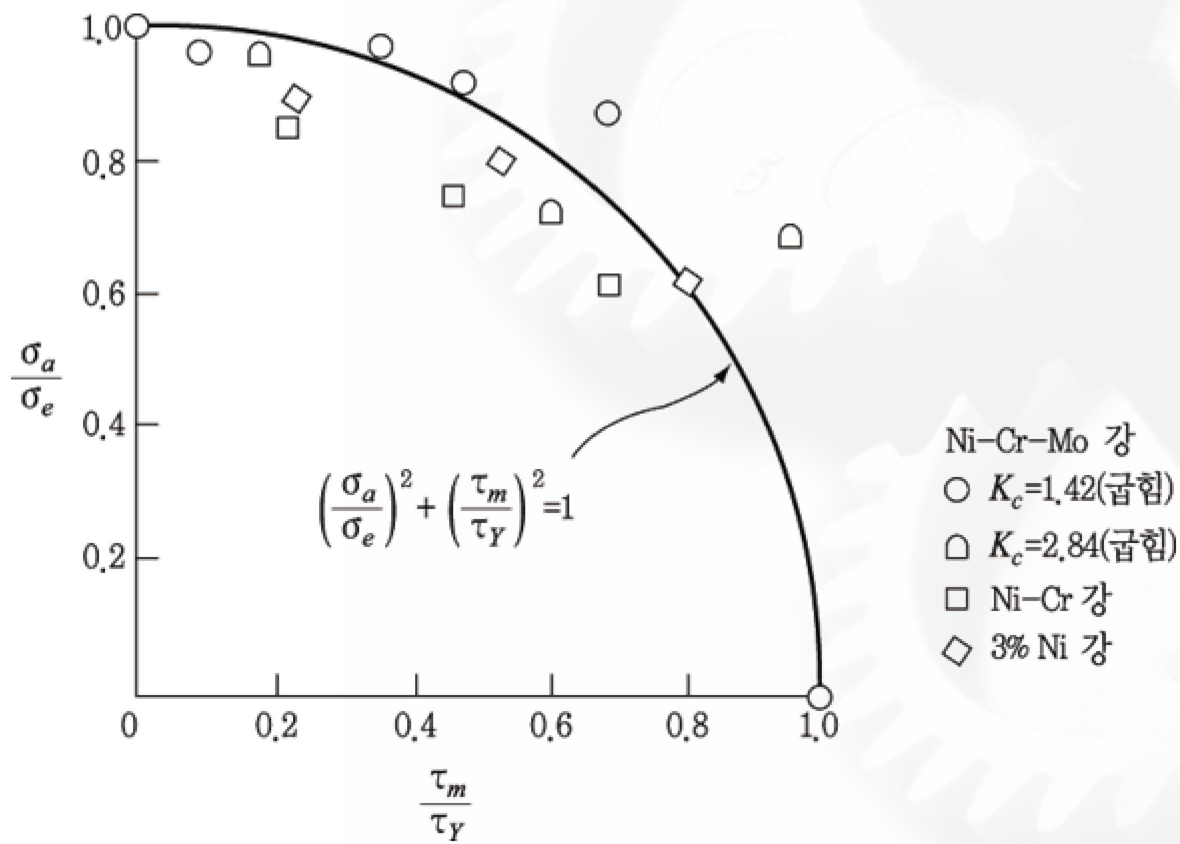
➔ $M_m = \frac{1}{2}[M + (-M)] = 0 \qquad M_a = \frac{1}{2}[M - (-M)] = M$

$T_m = \frac{1}{2}(T + T) = T \qquad T_a = \frac{1}{2}(T - T) = 0$

최대전단응력	$d = \left[\frac{32S}{\pi}\sqrt{\left(\frac{M}{\sigma_e}\right)^2 + \left(\frac{T}{\sigma_Y}\right)^2}\right]^{1/3}$
von Mises 상당응력	$d = \left[\frac{32S}{\pi}\sqrt{\left(\frac{M}{\sigma_e}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{T}{\sigma_Y}\right)^2}\right]^{1/3}$

정상상태에서의 ASME 회전축 설계식

➢ **ASME 파손기준과 회전축의 실험결과의 비교**



예제 4.3

회전하는 전동축에서 굽힘모멘트 M = 20000kg-mm와 비틀림모멘트 T = 37500kg-mm가 작용할 때 축지름을 구하라.

단, 항복강도 σ_Y = 45kg/mm^2, 피로한도 σ_e = 13.5kg/mm^2, 안전율 S = 1.8이다.

a) 정하중 설계

– 최대전단응력 이론

$$d=\left[\frac{32S}{\pi\sigma_Y}\sqrt{M^2+T^2}\right]^{1/3}=\left[\frac{32\times1.8}{\pi\times45}\sqrt{20000^2+37500^2}\right]^{1/3}=\underline{25.9\text{mm}}$$

– 전단변형에너지 이론

$$d=\left[\frac{32S}{\pi\sigma_Y}\sqrt{M^2+\frac{3}{4}T^2}\right]^{1/3}=\left[\frac{32\times1.8}{\pi\times45}\sqrt{20000^2+\frac{3}{4}\times37500^2}\right]^{1/3}=\underline{25\text{mm}}$$

b) 동하중 설계

– 최대전단응력 이론

$$d=\left[\frac{32S}{\pi}\sqrt{\left(\frac{M}{\sigma_e}\right)^2+\left(\frac{T}{\sigma_Y}\right)^2}\right]^{\frac{1}{3}}=\left[\frac{32\times1.8}{\pi}\sqrt{\left(\frac{20000}{13.5}\right)^2+\left(\frac{37500}{45}\right)^2}\right]^{\frac{1}{3}}=\underline{31.5\text{mm}}$$

– 전단변형에너지 이론

$$d=\left[\frac{32S}{\pi}\sqrt{\left(\frac{M}{\sigma_e}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{T}{\sigma_Y}\right)^2}\right]^{\frac{1}{3}}=\left[\frac{32\times1.8}{\pi}\sqrt{\left(\frac{20000}{13.5}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{37500}{45}\right)^2}\right]^{\frac{1}{3}}=\underline{31.1\text{mm}}$$

4.1.2 축의 강성설계

* 축 처짐이 많을 경우
  - 베어링의 부분접촉에 의한 이상 마멸 및 과열
  - 기어의 물림, 벨트의 장력 감소 → 동력 전달 불가

➢ 굽힘 모멘트에 의한 축의 변형

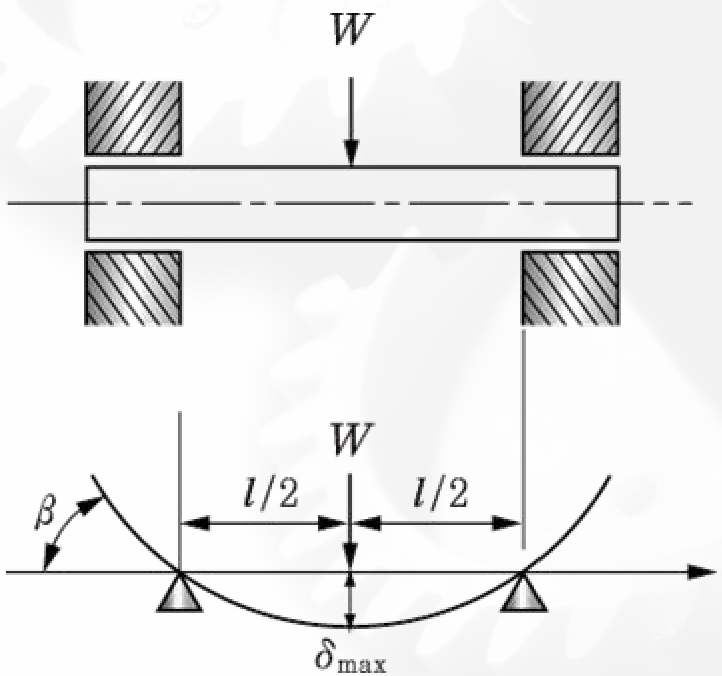
✓ 축의 중앙에 집중하중이 작용할 때

$$\beta = \frac{Wl^2}{16EI} \le \beta_a = 1/1000(rad)$$

$$d \ge \sqrt[4]{\frac{4Wl^2}{\pi E \beta_a}}$$

$$\delta_{max} = \frac{Wl^3}{48EI} \le \delta_a = l/3000$$

$$d \ge \sqrt[4]{\frac{4Wl^3}{3\pi E \delta_a}}$$

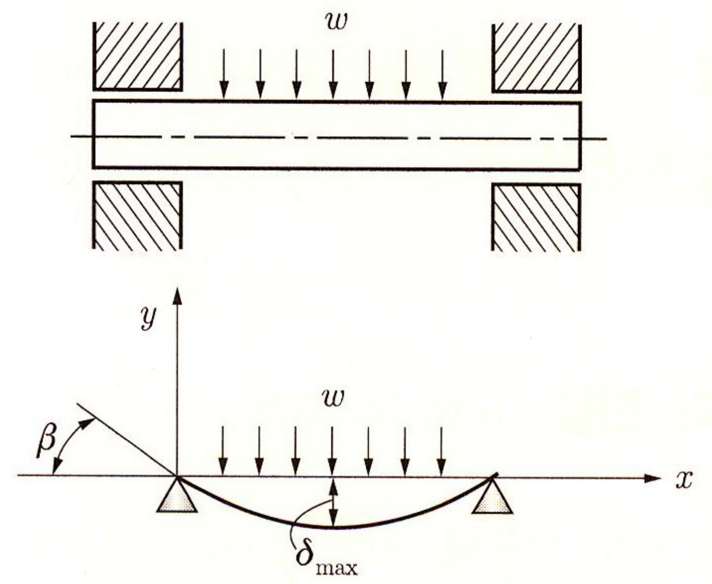


4.1 축

✓ 축에 균일 분포하중이 작용할

$$\beta = \frac{Wl^2}{24EI} \le \beta_a = 1/1000(rad)$$

$$d \ge \sqrt[4]{\frac{8Wl^2}{3\pi E\beta_a}}$$



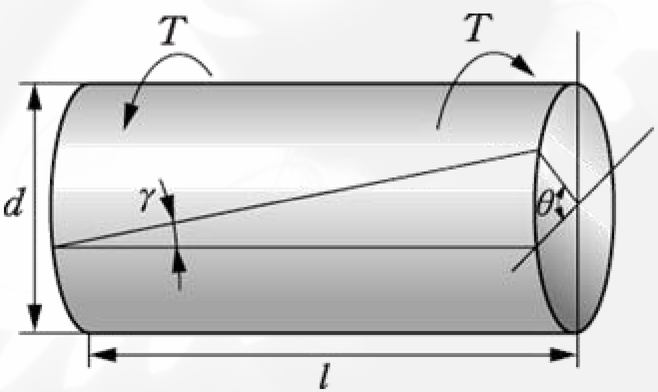
* 비틀림각의 제한

− $l \gg d$ → 축 양 끝의 위상차인 비틀림각이 커짐

→ 기어 이의 물림이 어렵고 비틀림진동 발생

➢ 비틀림 모멘트에 의한 축의 변형

✓ 비틀림각 크기



$$\theta^{(\mathrm{Rad})} = \frac{32}{\pi d^4} \cdot \frac{Tl}{G}$$

$$\theta^{(\circ)} = \frac{32}{\pi d^4} \cdot \frac{Tl}{G} \cdot \frac{180}{\pi} \le \theta_a$$

$$d \ge \sqrt[4]{\frac{32x180Tl}{\pi^2 G \theta_a}}$$

− 일반 축인 경우 $l = 20d$ 이면 $\theta_a = 1^0$

$l = 1m$ 이면 $\theta_a = 1/4^0$ [Bach 조건]

연강 축[$G = 8300kg/mm^2$]에 Bach조건을 적용하고, $T = 716200\frac{H}{N}(kg.mm)$ 대입하면

$$d \ge 120\sqrt[4]{\frac{H}{N}}(mm)$$ [Bach 공식]

4.1 축

예제 4.4

180rpm으로 30ps를 전달하는 중실축의 지름을 구하라.

단, 재료의 전단허용응력 = 4.0kg/mm², 전단탄성계수 G = 8300kg/mm²이다.

a) 비틀림 강도에 의한 계산

– 축에 가해지는 비틀림모멘트 : 식 (4.1)

$$T = 716200\frac{H}{N} = 716200 \times \frac{30}{180} = 119367(\mathrm{kg \cdot mm})$$

– 최대전단응력

$$\tau_{\max} = \frac{T}{Z_p} = \frac{T}{\frac{\pi}{16}d^3} \le \tau_a$$

➔ 축지름

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi\tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}\frac{119367}{4}} = \underline{53.4\mathrm{mm}}$$

4.1 축

b) 비틀림 강성에 의한 계산

- 비틀림 강성을 고려하는 방법 → 축길이 1m당 비틀림각 0.25 ° 이내로 제한
- 최대 비틀림각 : 식 (4.24)

$$\theta^{(\circ)} = \frac{32}{\pi d^4}\frac{Tl}{G}\frac{180}{\pi} \le \theta_a$$

➔ 축지름

$$d \ge \sqrt[4]{\frac{32}{\pi}\frac{Tl}{G\theta_a}\frac{180}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi}\times\frac{119367\times 1000}{8300\times 0.25}\times\frac{180}{\pi}} = \underline{76.12\text{mm}}$$

c) 중실축 지름 결정

- 비틀림 강도 : $d \ge$ 53.4mm
- 비틀림 강성 : $d \ge$ 76.12mm

➔ 축지름 ***d* = 80mm**

4.1.3 축길이의 설계[베어링 사이의 거리]

➔ 굽힘강도와 굽힘변형에 의하여 결정

전 중량(W) = 축 무게($\frac{\pi}{4}d^2 l\gamma$) + 축에 고정된 요소들의 무게 + 전달력

$$W = C\frac{\pi}{4}d^2 l\gamma$$

- γ : 단위체적당 무게
- C : 축 무게 외의 요소에 대한 보정 계수[C=4~4.5]

[1] 굽힘강도에 의한 축길이

- ✓ 최대굽힘모멘트

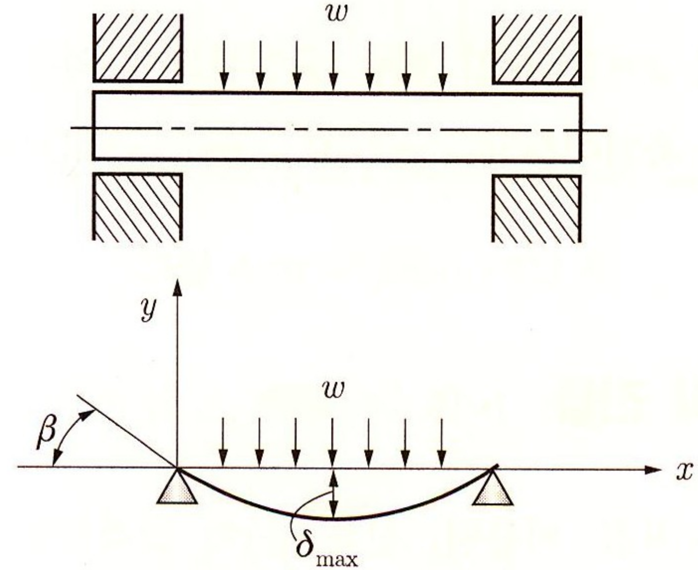
$$M = \frac{wl^2}{8} = \frac{\pi d^3}{32}\sigma_b$$

- ✓ 베어링 사이의 축의 길이

$$l = \sqrt{\frac{d\sigma_b}{C\gamma}}$$

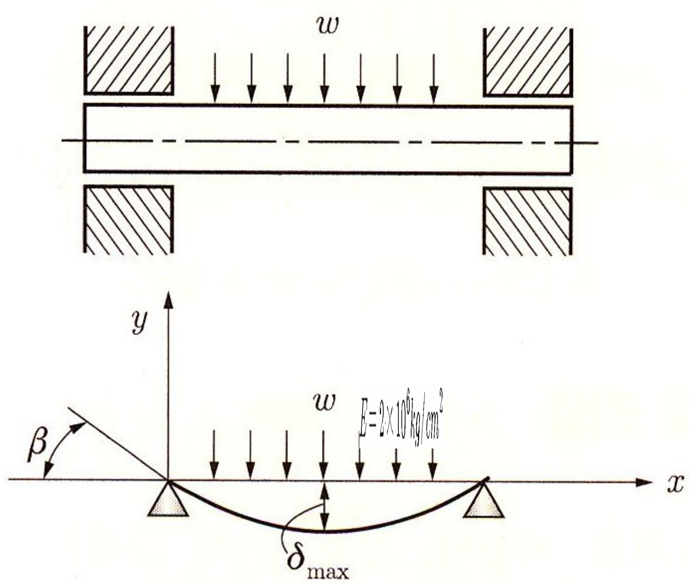
- ✓ 축의 재료가 연강인 경우

$\sigma_b = 350\ \mathrm{kg/cm^2}$
$\gamma = 0.00785\ \mathrm{kg/cm^3}$
$C = 4.5$



$$\therefore \quad l \fallingdotseq 100\sqrt{d} \quad (cm)$$

(2) 굽힘변형에 의한 축의 길이



$$\beta = \beta_{max} = \frac{w\ell^3}{24EI}, \qquad (\because w = \frac{W}{\ell})$$

$$W = C(\frac{\pi d^2 \ell}{4})\gamma, \quad I = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$\therefore \quad l = \sqrt[3]{\frac{3Ed^2\beta_a}{2C\gamma}}$$

연강 축 : $E = 2.1 \times 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$, $\beta_a = \frac{1}{1000}$, $C = 4.5$

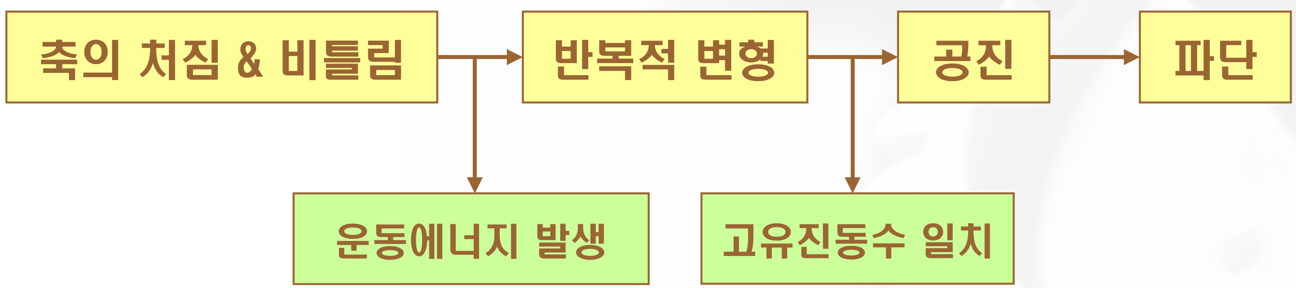
$$\therefore \quad l = 45\sqrt[3]{d^2}\ (\mathrm{cm})$$

4.1.4 축의 진동

- 위험속도(critical speed)란?
  ➔ 공진 진동수에 일치하는 축의 회전속도

✓ 축의 회전속도 : 위험속도로부터 ±25%정도 떨어져 있어야 안전

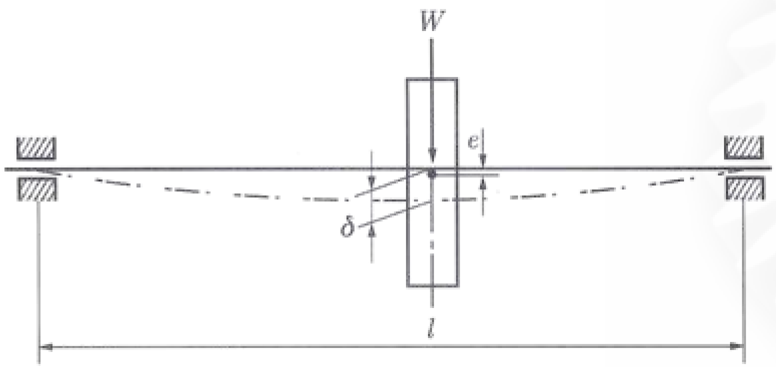
✓ 위험속도에 의한 파단 원리



4.1 축

(1) 축의 처짐 진동

➢ 회전체가 1개인 경우



- O : 회전중심
- m : 회전체 질량
- C : 회전체 질량 중심
- e : 축의 편심량
- δ : 축의 처짐량
- ω : 각속도
- k : 축의 스프링 상수

✓ 원심력 $F_o = m(\delta + e)\omega^2$

✓ 회전 원심력 = 탄성 복원력 $m(\delta + e)\omega^2 = k\delta$

$$\delta = \frac{m\omega^2 e}{k - m\omega^2} = \frac{e}{\dfrac{k}{m\omega^2} - 1}$$

4.1 축

(1) 축의 처짐 진동(회전체 1개)

- ✓ 축의 파손 조건 : $e \neq 0, \ \delta \Rightarrow \infty$ ➔ $k = m\omega^2$
- ✓ 위험속도 : 축의 파손 조건에서의 각속도

$$\omega = \omega_c = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta}}$$

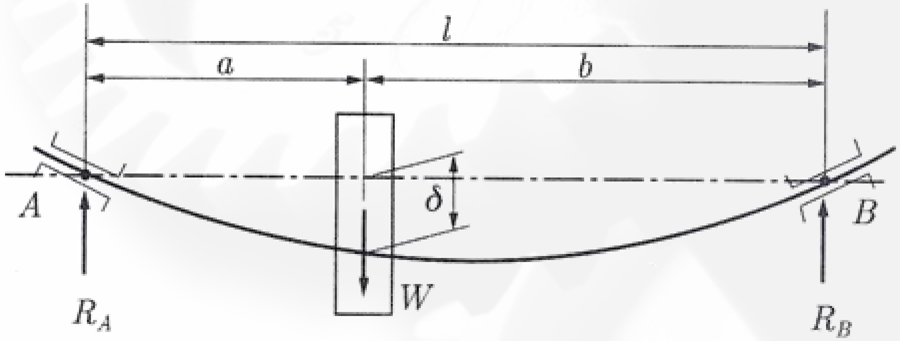
↓

$$N_c = \frac{60}{2\pi}\omega_c = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta}}\,(\mathrm{rpm})$$

4.1 축

(1) 축의 처짐 진동(회전체 1개)

- ✓ 축의 양끝이 볼베어링으로 지지
- ✓ 양단 지지보로 가정
- ✓ 축의 자중 무시



$$\delta = \frac{Wa^2b^2}{3EI(a+b)}$$

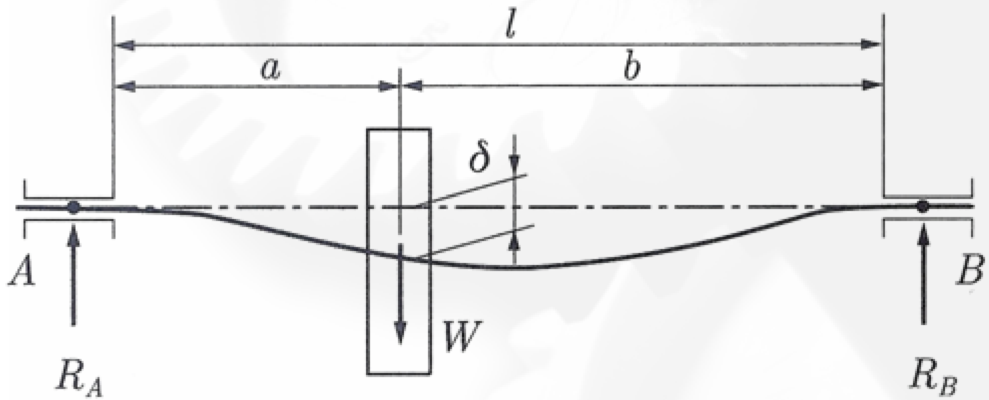
$$N_c = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta}} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{3EI(a+b)g}{Wa^2b^2}}$$

4.1 축

(1) 축의 처짐 진동(회전체 1개)

- ✓ 축의 양끝이 미끄럼베어링으로 지지
- ✓ 양단 고정보로 가정
- ✓ 축의 자중 무시

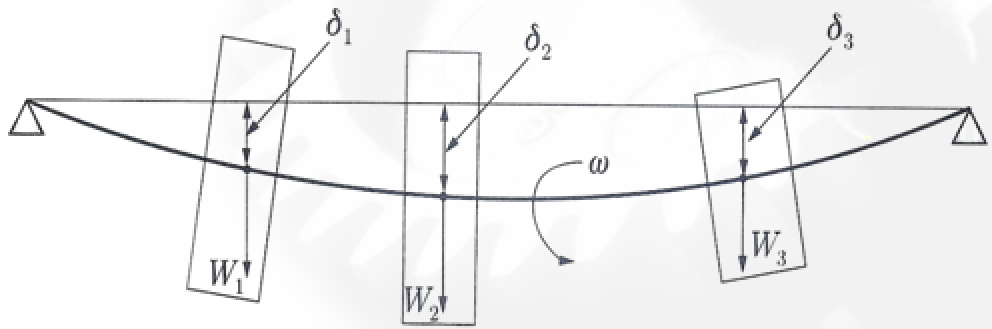
$$\delta = \frac{Wa^3b^3}{3EI(a+b)}$$



$$N_c = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{3EI(a+b)g}{Wa^3b^3}}$$

(1) 축의 처짐 진동

- ➢ **회전체가 2개 이상인 경우**
  - ✓ Raylegh**의 식**



-탄성변형에너지

$$E_p = \frac{W_1\delta_1}{2} + \frac{W_2\delta_2}{2} + \frac{W_3\delta_3}{2} + \cdots\cdots$$

-운동에너지

$$E_k = \frac{W_1}{2g}(\omega\delta_1)^2 + \frac{W_2}{2g}(\omega\delta_2)^2 + \frac{W_3}{2g}(\omega\delta_3)^2 \cdots\cdots$$

$$= \frac{\omega^2}{2g}(W_1\delta_1^2 + W_2\delta_2^2 + W_3\delta_3^2) \;\; \cdots\cdots$$