

맥스웰 방정식(Maxwell方程式, Maxwell's equations) 유도

1. 맥클로린 급수와 테일러 급수 정리

① 맥클로린 급수(Maclaurin's series)

맥클로린 급수는 임의의 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대한 1차함수, 2차함수, 3차함수 등등 x 에 대한 고차함수의 다항식의 형태로 표현하는 것을 의미한다. 즉, 주어진 임의의 함수 $f(x)$ 가 다음과 같은 형태의 다항식으로 표현된다고 가정해보자.

$$f(x) = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n + \dots$$

주어진 등식을 만족하는 계수 $c_i(i=0,1,2,3,\dots)$ 를 구해보자. 계수를 구하는 방법을 정리하면 다음과 같다. 먼저, 주어진 식을 연속 미분하여 정리한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \dots \\ f'(x) &= c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + \dots \\ f''(x) &= 2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + 4 \cdot 3c_4x^2 + 5 \cdot 4c_5x^3 + \dots \\ f'''(x) &= 3 \cdot 2c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4x + 5 \cdot 4 \cdot 3c_5x^2 + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

위의 식에 $x=0$ 을 대입하여 전개하면 다음과 같다.

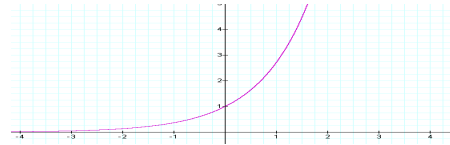
$$\begin{aligned} f(0) &= c_0 \\ f'(0) &= 1c_1 \\ f''(0) &= 2 \cdot 1c_2 \\ f'''(0) &= 3 \cdot 2 \cdot 1c_3 \end{aligned}$$

미분을 통하여 계산된 변수 $c_i(i=0,1,2,3,\dots)$ 의 값을 주어진 식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 맥클로린 급수전개식이 유도된다.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

이를 맥클로린 급수 또는, $x=0$ 에 대한 $f(x)$ 의 멱급수 전개(power-series expansion)라고 한다. 콜린 맥클로린(Colin Maclaurin, 1698-1746)은 스코틀랜드 수학자이다.

주어진 함수 $f(x) = e^x$ 의 그래프는 다음과 같다.

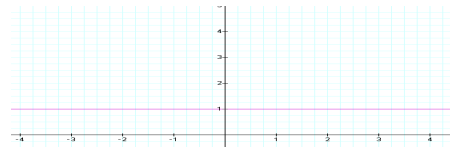


주어진 함수를 맥클로린 급수를 이용하여 전개하면 다음과 같다.

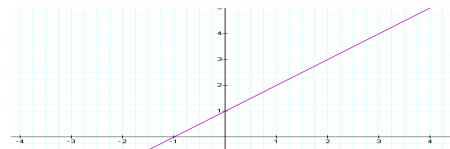
$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

맥클로린 급수에 의한 함수 전개식을 항별로 그려보면 다음과 같다.

▷ $f(x) = 1$



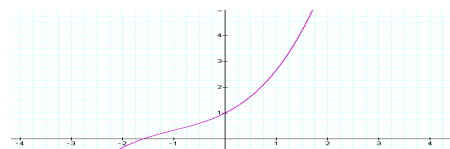
▷ $f(x) = 1 + x$



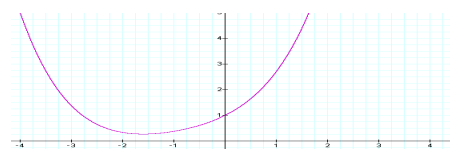
▷ $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$



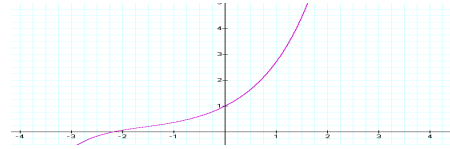
▷ $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$



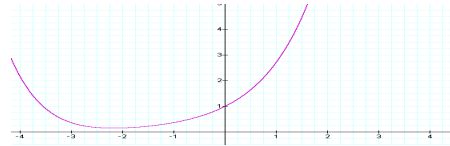
▷ $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$



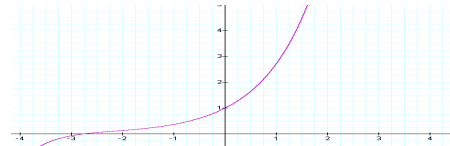
$$\triangleright f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5$$



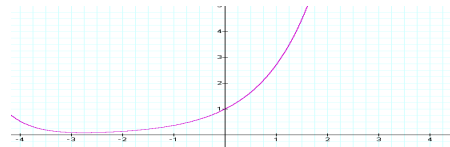
$$\triangleright f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$$



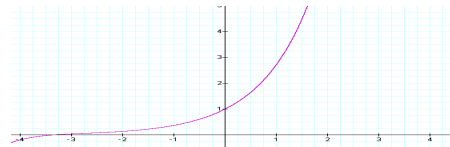
$$\triangleright f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7$$



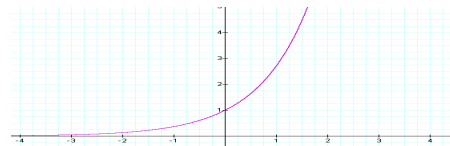
$$\triangleright f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{40320}x^8$$



$$\triangleright f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{362880}x^9$$



x 에 대한 9차 함수까지의 합을 나타낸 그래프를 주어진 원함수 $f(x) = e^x$ 의 그래프와 비교하면 맥클로린 급수의 의미를 쉽게 분석할 수 있다.



$$f(x) = e^x$$

② 테일러 급수(Taylor's series)

테일러 급수는 미적분학에서, 미분 가능한 어떤 임의의 함수를 맥클로린 급수와 유사하게 다항식의 형태로 표현하는 것이다. 이 이름은 영국의 수학자 브룩 테일러의 이름에서 따온 것이지만, 브룩 테일러가 처음으로 발견한 것은 아니다.

테일러 급수는 맥클로린 급수 전개식과는 다르게 주어진 임의의 함수 $f(x)$ 가 다음과 같은 다항식의 형태로 표현된다고 가정하는 것이다.

$$f(x) = a_0(x-a)^0 + a_1(x-a)^1 + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

다항식의 계수 $a_i (i = 0, 1, 2, 3, \dots)$ 를 결정하기 위하여 주어진 식을 미분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + a_4(x-a)^4 + \dots \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 + \dots \\ f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-a) + 4 \cdot 3a_4(x-a)^2 + 5 \cdot 4a_5(x-a)^3 + \dots \\ f'''(x) &= 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x-a) + 5 \cdot 4 \cdot 3a_5(x-a)^2 + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

위의 식에 $x = a$ 를 대입하여 정리하면,

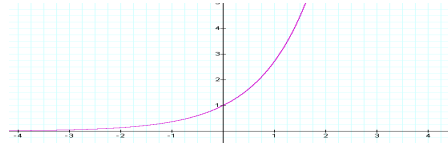
$$\begin{aligned} f(a) &= a_0 \\ f'(a) &= 1a_1 \\ f''(a) &= 2 \cdot 1a_2 \\ f'''(a) &= 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 \end{aligned}$$

이 된다. 위의 식으로부터 계산된 다항식의 계수 $a_i (i = 0, 1, 2, 3, \dots)$ 를 식 (1)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \end{aligned}$$

위의 식을 테일러의 급수전개식(Taylor's series)이라고 한다.

주어진 지수함수 $f(x) = e^x$ 를 이용하여 테일러 급수의 의미를 설명하면 다음과 같다.



먼저, 지수함수 $f(x) = e^x$ 를 테일러급수를 이용하여 정리하려면 약간의 문제가 발생한다.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

a 의 값을 정해야 하기 때문이다. 간단하게 $a = 1$ 을 대입하여 수식을 정리하면 다음과 같이 정리된다.

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \dots$$

지수함수 $f(x) = e^x$ 는 미분해도 자기 자신이 되는 함수이다. 그러므로

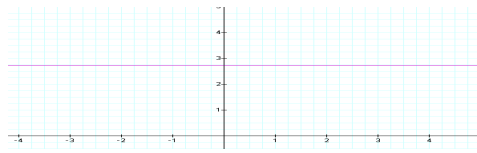
$$f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = e^1 = 2.718281828\dots$$

이 되며, 주어진 값을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

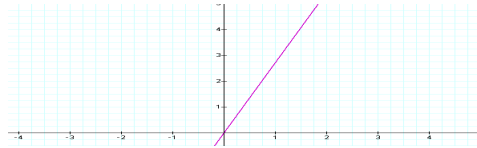
$$f(x) = 2.72 + \frac{2.72}{1!}(x-1) + \frac{2.72}{2!}(x-1)^2 + \frac{2.72}{3!}(x-1)^3 + \frac{2.72}{4!}(x-1)^4 + \dots$$

위의 식에서 x 에 대한 고차함수 별로 그래프를 그려보면 다음과 같다.

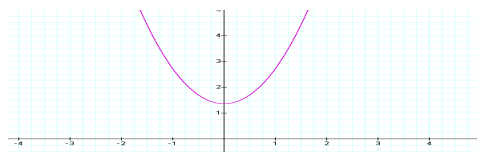
▷ $f(x) = 2.72$



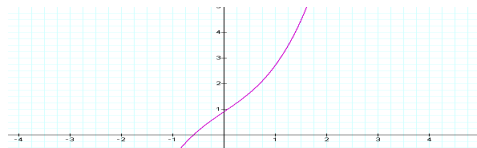
$$\triangleright f(x) = 2.72 + \frac{2.72}{1!}(x-1)$$



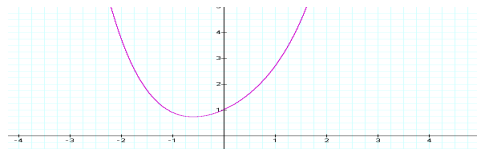
$$\triangleright f(x) = 2.72 + \frac{2.72}{1!}(x-1) + \frac{2.72}{2!}(x-1)^2$$



$$\triangleright f(x) = 2.72 + \frac{2.72}{1!}(x-1) + \frac{2.72}{2!}(x-1)^2 + \frac{2.72}{3!}(x-1)^3$$



$$\triangleright f(x) = 2.72 + \frac{2.72}{1!}(x-1) + \frac{2.72}{2!}(x-1)^2 + \frac{2.72}{3!}(x-1)^3 + \frac{2.72}{4!}(x-1)^4$$



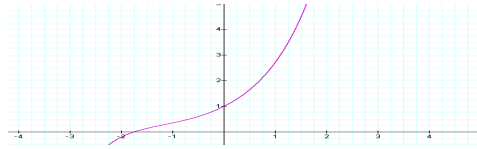
$$\triangleright f(x) = 2.72 + \frac{2.72}{1!}(x-1) + \frac{2.72}{2!}(x-1)^2 + \frac{2.72}{3!}(x-1)^3 + \frac{2.72}{4!}(x-1)^4 + \frac{2.72}{5!}(x-1)^5$$



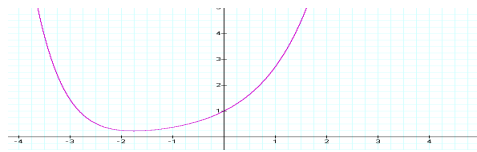
$$\triangleright f(x) = 2.72 + \frac{2.72}{1!}(x-1) + \frac{2.72}{2!}(x-1)^2 + \frac{2.72}{3!}(x-1)^3 + \frac{2.72}{4!}(x-1)^4 + \frac{2.72}{5!}(x-1)^5 + \frac{2.72}{6!}(x-1)^6$$



$$\triangleright f(x) = 2.72 + \frac{2.72}{1!}(x-1) + \frac{2.72}{2!}(x-1)^2 + \frac{2.72}{3!}(x-1)^3 + \frac{2.72}{4!}(x-1)^4 + \frac{2.72}{5!}(x-1)^5 + \frac{2.72}{6!}(x-1)^6 + \frac{2.72}{7!}(x-1)^7$$



$$\triangleright f(x) = 2.72 + \frac{2.72}{1!}(x-1) + \frac{2.72}{2!}(x-1)^2 + \frac{2.72}{3!}(x-1)^3 + \frac{2.72}{4!}(x-1)^4 + \frac{2.72}{5!}(x-1)^5 + \frac{2.72}{6!}(x-1)^6 + \frac{2.72}{7!}(x-1)^7 + \frac{2.72}{8!}(x-1)^8$$



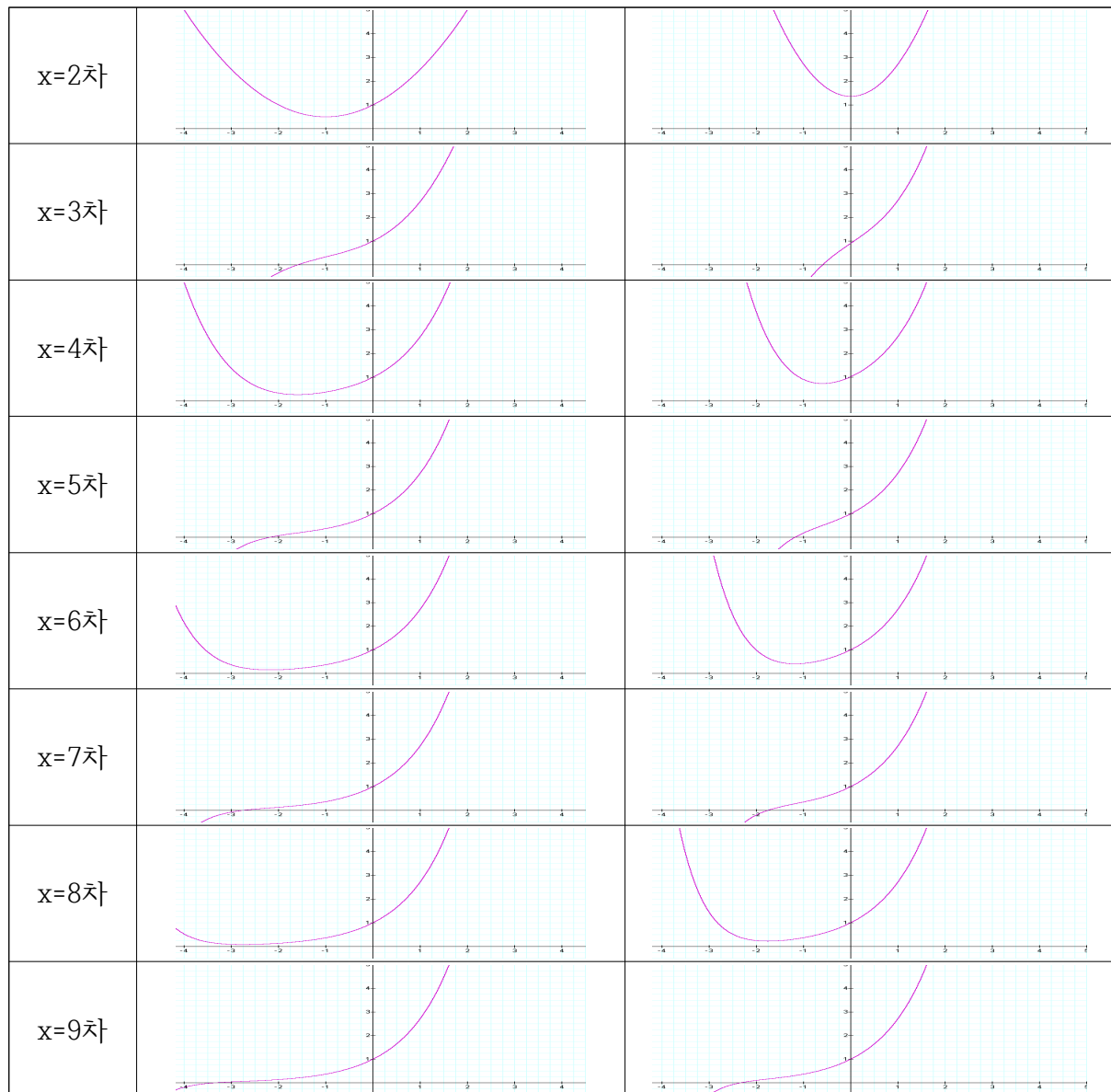
$$\triangleright f(x) = 2.72 + \frac{2.72}{1!}(x-1) + \frac{2.72}{2!}(x-1)^2 + \frac{2.72}{3!}(x-1)^3 + \frac{2.72}{4!}(x-1)^4 + \frac{2.72}{5!}(x-1)^5 + \frac{2.72}{6!}(x-1)^6 + \frac{2.72}{7!}(x-1)^7 + \frac{2.72}{8!}(x-1)^8 + \frac{2.72}{9!}(x-1)^9$$



x 에 대한 9차함수까지의 합을 나타낸 그림을 보면 주어진 지수함수 e^x 의 그래프를 그대로 따라가고 있는 것을 알 수 있다.

▶ 지수함수 $f(x) = e^x$ 에 대한 맥클로린 급수전개식과 테일러 급수전개식의 그래프를 x 에 대한 고차함수의 차수별로 나누어 정리하면 다음과 같다.

	Maclaurin 급수	Taylor 급수
x=0차 상수항		
x=1차		



그래프의 비교에서 알 수 있듯이 맥클로린 급수는 주어진 함수를 $x=0$ 의 위치에서 다항식의 형태로 급수전개하여 표현한 것이고, 테일러 급수는 주어진 함수를 $x=a$ 위치에서 다항식의 형태로 급수전개하여 표현한 결과를 보여준다.

2차이상의 고차 미분항을 생략하면 테일러 급수로 주어진 함수 $f(x)$ 는

$$x=a\text{에서의 함수값 } f(a) + \text{함수 } f(x)\text{의 미분(변화율)} * x \text{ 방향의 증분}(x-a)$$

과 같은 형태로 정리할 수 있다.

2. 델(Del) 미분연산자(differential operator)

나블라(Nabla)는 기호(symbol) ∇ 를 의미한다. 어원은 형상이 비슷한 하프(Harp)를 의미하는 그리스어에서 유래되었다. 벡터해석에서 이용되는 델(Del)은 미분계산을 수행하는 미분연산자를 의미하는데 나블라라는 기호를 이용하여 다음과 같이 간단하게 표현한다.

➡ 델(Del)의 정의

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z \quad (1)$$

임의의 벡터 $\vec{D}$ 가 다음과 같이 표현된다고 하면,

$$\vec{D} = D_x \hat{a}_x + D_y \hat{a}_y + D_z \hat{a}_z \quad (2)$$

델(Del) 미분 연산자를 이용하여 벡터 $\vec{D}$ 에 대한 발산 즉, $div \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D}$ 를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z \right) \cdot (D_x \hat{a}_x + D_y \hat{a}_y + D_z \hat{a}_z) \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (3)$$

3. 발산정리(divergence theorem)

Q] 왜 ! 발산 정리를 배우는가 ?

A] 임의의 체적의 외부경계 즉, 폐곡면에서 전속밀도를 적분하면 그 폐곡면 내부에 존재하는 전하량의 합과 같다는 가우스법칙(Gauss law)[$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$]이 발산정리를 통하여 진화한다.

발산정리의 최종 결과식은 다음과 같다.

$$\vec{D}의발산 \equiv div \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} \equiv \lim_{dv \rightarrow 0} \frac{\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s}}{dv}$$

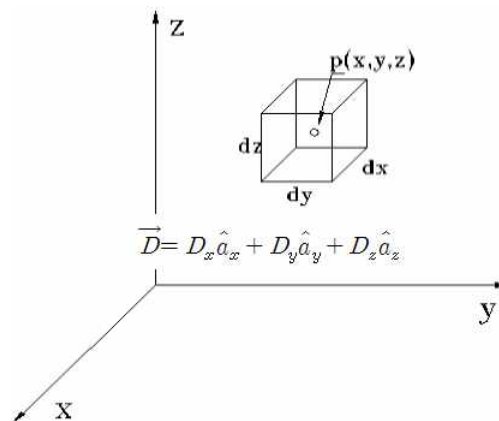
발산정리와 가우스법칙을 적용하면 다음과 같은 가우스-발산정리가 유도된다.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \lim_{dv \rightarrow 0} \frac{\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s}}{dv} = \lim_{dv \rightarrow 0} \frac{Q}{dv} = \rho_v$$

즉, 폐곡면을 구성하는 미소체적의 크기를 0으로 접근시키면 체적내부에 존재하는 전하량 Q 는 체적 전하밀도 ρ_v 가 된다.

➡ 발산정리 유도

발산정리는 수학적으로 임의의 체적에서(체적의 크기를 0으로 만드는 극한을 취함) 체적을 구성하는 폐곡면에서의 벡터 $\vec{D}$ 와 폐곡면의 벡터 $\vec{S}$ 와의 내적적분을 체적의 크기로 나누는 개념을 나타내는데 발산정리를 유도하면 다음과 같다.



임의의 한 점 $p(x, y, z)$ 에서 벡터 $\vec{D}$ 가 다음과 같이 표현된다고 하자.

$$\vec{D} = D_x \hat{a}_x + D_y \hat{a}_y + D_z \hat{a}_z \quad (1)$$

임의의 한 점 $p(x,y,z)$ 를 중심으로 하고 한 변의 길이가 dx, dy, dz 인 그림과 같은 미소 정육면체를 생각하면, 정육면체의 6개의 표면에서 벡터 $\vec{D}$ 를 내적적분하면 다음과 같다.

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{전}} + \int_{\text{후}} + \int_{\text{좌}} + \int_{\text{우}} + \int_{\text{상}} + \int_{\text{하}} \quad (2)$$

먼저 $+x$ 방향의 $\int_{\text{전}}$ 에 대한 적분을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{\text{전}} &= \vec{D}_{\text{전}} \cdot d\vec{s}_{\text{전}} \\ &= \vec{D}_{\text{전}} \cdot dydz * \hat{a}_x \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 미소면적 $dy * dz$ 의 크기를 가지는 미소표면 $d\vec{s}_{\text{전}}$ 의 전체 면에서 $+x$ 방향 벡터의 성분이 $\vec{D}_{\text{전},x}$ 으로 일정하다고 가정하면

$$\cong D_{\text{전},x} * dydz \quad (4)$$

여기서 $D_{\text{전},x}$ 는 점 $p(x,y,z)$ 로부터 $+x$ 방향으로 $dx/2$ 만큼 떨어져 위치하므로 고차항을 무시하고 테일러급수를 적용하면 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} D_{\text{전},x} &\cong D_x + \left(D_x \text{의 } x \text{에 대한 변화율} * \frac{dx}{2} \right) \\ &\cong D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

따라서 $+x$ 방향의 $\int_{\text{전}}$ 에 대한 적분결과는 다음과 같다.

$$\int_{\text{전}} \cong \left(D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) * dydz \quad (6)$$

동일한 방법으로 $-x$ 방향의 $\int_{\text{후}}$ 에 대한 적분을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{\text{후}} &\cong \vec{D}_{\text{후}} \cdot d\vec{s}_{\text{후}} \\ &\cong \vec{D}_{\text{후}} \cdot (dy * dz * (-)\hat{a}_x) \\ &\cong (-)D_{\text{후},x} * dydz \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $D_{\text{후},x}$ 는 다음과 같이 계산이 가능하다.

$$\begin{aligned} D_{\text{후},x} &\cong D_x + \left(D_x \text{의 } x \text{에 대한 변화율} \times (-)\frac{dx}{2} \right) \\ &\cong D_x - \frac{\partial D_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

따라서 식(8)의 결과를 식(7)에 대입하여 $-x$ 방향의 $\int_{\text{후}}$ 에 대한 적분을 정리하면 다음과

같다.

$$\int_{\text{후}} \cong \left(-D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) * dydz \quad (9)$$

적분 $\int_{\text{전}} + \int_{\text{후}}$ 의 계산을 위하여 식 (6)과 식(9)를 더하면 다음과 같다.

$$\int_{\text{전}} + \int_{\text{후}} \cong \frac{\partial D_x}{\partial x} * dxdydz \quad (10)$$

같은 방법으로, $\int_{\text{좌}} + \int_{\text{우}}, \int_{\text{상}} + \int_{\text{하}}$ 를 계산하면 다음과 같다.

$$\int_{\text{좌}} + \int_{\text{우}} \cong \frac{\partial D_y}{\partial y} * dxdydz \quad (11)$$

$$\int_{\text{상}} + \int_{\text{하}} \cong \frac{\partial D_z}{\partial z} * dxdydz \quad (12)$$

결과적으로 $\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{전}} + \int_{\text{후}} + \int_{\text{좌}} + \int_{\text{우}} + \int_{\text{상}} + \int_{\text{하}}$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} &\cong \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) * dxdydz \\ \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} &\cong \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) * dv \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)은 정육면체의 미소 체적 $dv = (dxdydz)$ 이 작아질수록 결과 값의 정확도는 향상된다. 따라서 dv 를 0으로 하는 극한값을 취하면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} &\cong \frac{\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s}}{dv} \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= \lim_{dv \rightarrow 0} \frac{\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s}}{dv} \end{aligned} \quad (14)$$

델(Del) 미분 연산자를 이용하여 식(14)를 표현하면 다음과 같다.

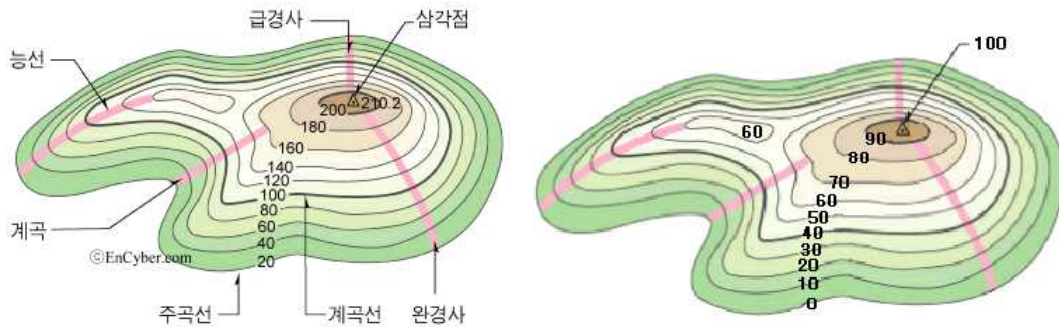
$$\lim_{dv \rightarrow 0} \frac{\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s}}{dv} \equiv \vec{D} \text{의 발산} \equiv \text{div} \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} \quad (15)$$

벡터 $\vec{D}$ 의 발산 : 미소 체적의 크기를 매우 작게 할 때, 미소체적의 내부로부터 밖으로 나가는 전속벡터 $\vec{D}$ 와 폐곡면을 구성하는 곡면법선 벡터 $\vec{S}$ 와의 내적(Dot Product)에 대한 적분을 의미한다.

4. 경사(gradient)정리

Q] 왜 ! Gradient(경사, 경도, 기울기)의 개념을 배우는가 ?

A] 아래 그림과 같은 지도의 등고선을 살펴보자. 등고선의 간격이 좁아지면 급경사를 이루고 있음을 알 수 있다. 만약에 정상에서 물을 부었다고 가정하면 물은 매 순간 급경사를 찾아서 흘러가게 될 것이다.



정상의 위치 즉, 삼각점에서의 전압(Voltage) 혹은 전위(Potential) +100를 인가하고 외부경계면에서의 전위를 0을 위치시키면 등고선과 같은 형태의 등전위 분포가 구성된다. 등전위 분포에 수직방향으로 구성되는 벡터의 장 $\vec{E}$ 을 구하는 것이 Gradient(경사, 경도, 기울기)이다.

전기장 내에서 단위전하가 가지는 위치에너지가 전위이다. 그러므로 임의의 한 점 B에서 다른 한 점 A로 단위 양전하를 이동시키는데 외부에서 일을 해주어야 한다면, 전위차는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{전위차} = V = - \int_{\text{시점}}^{\text{종점}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1)$$

$$V_{AB} = V_A - V_B = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2)$$

여기서, 일을 하는 경우, V_{AB} 의 값은 (+)값이 된다. 해석영역에서의 전위 V 에 대한 최대 변화율(수직방향) 즉, 전장의 세기 $\vec{E}$ 를 계산하는 방법은 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{E} = - \frac{dV}{dl} \Big|_{\max} \hat{a}_n \quad (3)$$

여기서, l 은 등전위 사이의 거리, $\max$ 는 등전위의 거리가 최소인 경우, 법선벡터 $\hat{a}_n$ 는 등전위면에 수직이며 전위가 증가하는 방향을 가지는 단위벡터이다.

벡터 $\vec{E}$ 의 크기는 전위 V 의 위치에 따른 최대변화와 같고, 방향은 등전위면의 전위가 감소하는 수직방향이다. $-\frac{dV}{dl} \Big|_{\max}$ 는 $d\vec{l}$ 이 $\hat{a}_n$ 방향에 있을 때 발생하므로 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dl} \big|_{\max \hat{a}_n} = -\frac{dV}{dN} \hat{a}_n \quad (4)$$

벡터해석에서 전위 V 와 같은 스칼라 장(field)에서 벡터 $\vec{E}$ 와 같은 벡터장(field)을 계산하는 방법이 경사(Gradient) 이론이다.

$$\text{Grad } T = \frac{dT}{dN} \hat{a}_n \quad (5)$$

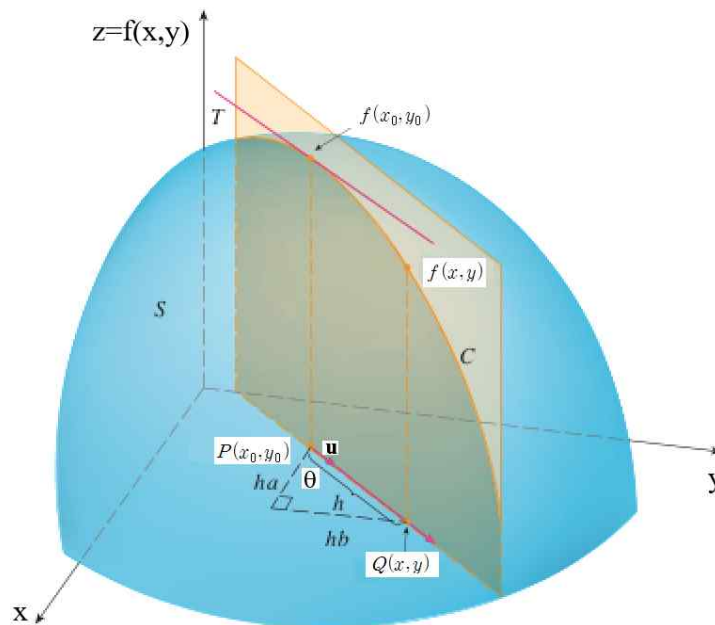
$$\vec{E} = -\text{Grad } V = -\nabla V \quad (6)$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z\right) V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{a}_z\right) \quad (7)$$

➡ 경사 정리 유도

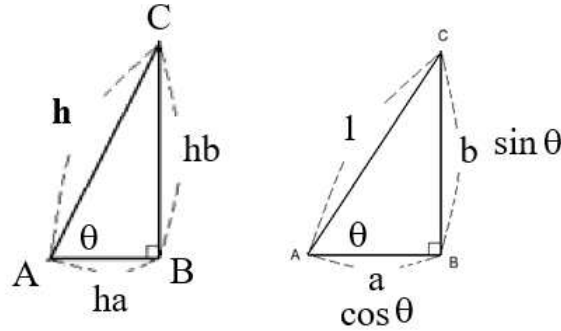
① 방향 도함수(directional derivative)

편도함수(partial derivative)를 이용하면, 2변수 함수 $z=f(x,y)$ 에서 y 가 고정되었을 때, x 축 방향으로의 변화율 $f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$, 그리고 x 가 고정되었을 때, y 축 방향으로의 변화율 $f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ 를 구할 수 있다. 여기서, xy 평면에 점 $P(x_0, y_0)$ 에서 점 $Q(x,y)$ 로 변하는 임의의 직선에 대한 함수값 $f(x_0, y_0)$ 에서 $f(x,y)$ 로의 변화율을 생각해 볼 수 있다.



곡면 $S: z=f(x,y)$ 와 평면 T 가 만나는 곡선을 C 라고 하고, 접선과 평행한 벡터를

$\vec{h} = ha\hat{x} + hb\hat{y}$ 고려하면, 벡터 $\vec{h}$ 의 단위벡터는 $\hat{u} = a\hat{x} + b\hat{y}$ 혹은 $\hat{u} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}$ 로 표현할 수 있다. 여기서, 벡터 $\vec{h}$ 와 단위벡터 $\hat{u}$ 는 다음과 같은 두 직각 삼각형을 고려하면 이해할 수 있다.



그림을 보면 $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$ 가 되고, 벡터 $\vec{h} = ha\hat{x} + hb\hat{y}$ 방향으로의 변화율은 다음과 같다.

$$\frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

따라서 점 P에서 점 Q 방향으로 벡터 $\vec{h}$ 의 단위벡터 $\hat{u} = a\hat{x} + b\hat{y}$ 방향으로의 접선의 기울기는 극한을 취하면 다음과 같다.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

이것을 ‘방향도함수’라고 하고 $D_{\hat{u}}f(x_0, y_0)$ 로 표기하며, 정리하면 다음과 같다.

$$D_{\hat{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

방향도함수는 단위벡터 $\hat{u}$ 방향으로의 함수값의 변화율을 나타낸다. 방향도함수에서 주의할 점은 벡터는 반드시 단위벡터가 되어야 한다. 만약 문제에서 주어진 벡터가 단위벡터가 아니라면 단위벡터로 만들어서 구해야 한다.

정리1 : 2변수 함수 $z=f(x,y)$ 가 미분 가능한 함수일 때, 단위벡터 $\hat{u} = a\hat{x} + b\hat{y}$ 의 방향으로 방향도함수는 다음과 같다.

$$D_{\hat{u}}f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$

<증명>

$g(0) = f(x_0, y_0)$, $g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$ 라 하면, 방향도함수의 정의에 의해

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \\ &= D_{\hat{u}}f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

한편, $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$ 라고 하면, $g(h) = f(x,y)$ 이다. 따라 연쇄법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} g'(h) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dh} \\ g'(h) &= f_x(x,y)a + f_y(x,y)b \end{aligned}$$

만약에 $h=0$ 이면, $x = x_0$, $y = y_0$ 이면, 연쇄법칙의 식에 대입하면 다음과 같다.

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b = D_{\hat{u}}f(x_0, y_0)$$

결과적으로 식을 정리하면 다음과 같다.

$$D_{\hat{u}}f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$

위의 식은 다음과 같이 두 벡터의 내적으로 표현하는 것이 가능하다.

$$\begin{aligned} D_{\hat{u}}f(x,y) &= f_x(x,y)a + f_y(x,y)b \\ D_{\hat{u}}f(x,y) &= (f_x(x,y)\hat{x} + f_y(x,y)\hat{y}) \cdot (a\hat{x} + b\hat{y}) \\ D_{\hat{u}}f(x,y) &= (f_x\hat{x} + f_y\hat{y}) \cdot \hat{u} \end{aligned}$$

여기서 단위벡터를 제외한 벡터 $f_x\hat{x} + f_y\hat{y}$ 를 경사 벡터 (gradient vector)라고 하고 다음과 같이 표기한다.

$$\nabla f = f_x(x,y)\hat{x} + f_y(x,y)\hat{y}$$

② 경사 벡터(gradient vector)

2변수 함수 $z=f(x,y)$ 에 대해 다음을 경사 벡터라고 한다.

$$\nabla f = f_x(x,y)\hat{x} + f_y(x,y)\hat{y} = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}$$

여기서, 경사 벡터는 시점이 (x,y) 인 벡터이다. 즉, $\nabla f(1,2)$ 는 시점이 $(1,2)$ 인 벡터이고, $\nabla f(0,3)$ 는 시점이 $(0,3)$ 인 벡터이다.

경사 벡터와 단위벡터가 이루는 각의 크기가 θ 이므로, 방향도함수는 경사 벡터를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$D_{\hat{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \hat{u}$$

$$D_{\hat{u}}f(x,y) = |\nabla f(x,y)| |\hat{u}| \cos\theta$$

$$D_{\hat{u}}f(x,y) = |\nabla f(x,y)| \cos\theta \quad \hat{u} \text{는 크기가 1인 단위벡터}$$

$0 \leq \theta < \pi$ 에서 $\cos\theta = 0$ 일 때 $|\nabla f|$ 는 최대값 1을 갖고, $\theta = \pi$ 일 때, $-|\nabla f|$ 는 최소값 -1을 갖는다.

정리 2 : 미분 가능한 함수 f 가 있을 때, 방향도함수 $D_{\hat{u}}f$ 의 최대값은 $|\nabla f|$, 최소값은 $-|\nabla f|$ 이다. 최대값을 가질 때는 단위벡터와 ∇f 의 방향이 같을 때 이고, 최소값을 가질 때는 단위벡터와 ∇f 의 방향이 서로 반대일 때 이다.

예) 함수 $f(x,y) = xe^y$ 와 두 점 $P(2,0)$, $Q(\frac{1}{2}, 2)$ 가 주어져 있다.

a) 점 P 에서의 점 Q 방향으로 즉, 벡터 $\overrightarrow{PQ}$ 방향으로의 방향도함수를 구하시요.

b) 방향도함수의 최대값을 구하고, 최대값을 가질 조건을 설명하시요.

a) 풀이

$$\overrightarrow{PQ} = (\frac{1}{2}\hat{x} + 2\hat{y}) - (2\hat{x} - 0\hat{y}) = -\frac{3}{2}\hat{x} + 2\hat{y}$$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (2)^2}} (-\frac{3}{2}\hat{x} + 2\hat{y}) = -\frac{3}{5}\hat{x} + \frac{4}{5}\hat{y}$$

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(xe^y)\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}(xe^y)\hat{y} = e^y\hat{x} + xe^y\hat{y}$$

$$\nabla f(2,0) = \hat{x} + 2\hat{y}$$

그러므로

$$D_{\hat{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \hat{u}$$

$$D_{\hat{u}}f(2, 0) = (\hat{x} + 2\hat{y}) \cdot \left(-\frac{3}{5}\hat{x} + \frac{4}{5}\hat{y}\right) = -\frac{1}{5} + \frac{8}{5} = 1$$

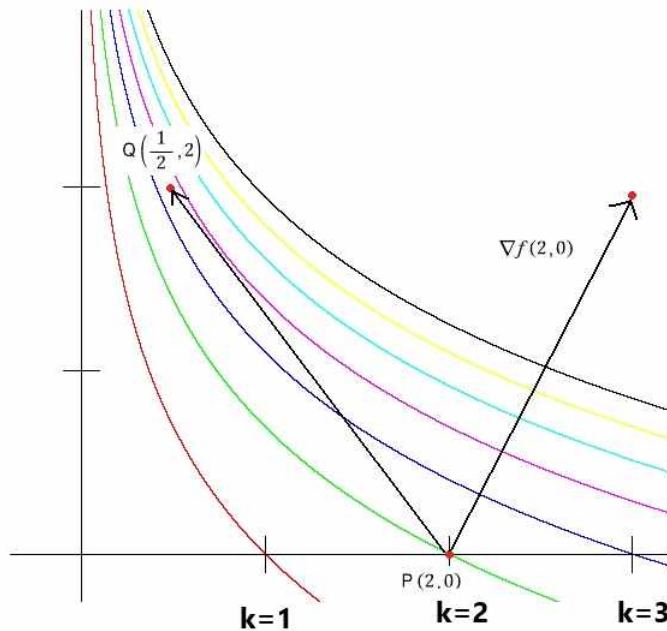
b) 방향도함수의 최대값은 $|\nabla f| = |\hat{x} + 2\hat{y}| = \sqrt{5}$ 이고, 단위벡터의 방향이 $\hat{x} + 2\hat{y}$ 일 때, 최대값을 갖는다.

함수 $f(x, y)$ 에 대한 등위곡선 $f(x, y) = k$ ($k = \text{상수}$)의 그래프에서, $(2, 0)$ 에서의 함수값의 변화율은 ∇f 의 방향에서 가장 크다는 것을 알 수 있다. 등위곡선의 간격이 가장 짧기 때문에 변화율이 큰 것이다. 점 $P(2, 0)$ 에서는 $\nabla f(2, 0)$ 이 방향이 가장 가파르다는 것을 보여준다.

$$f(x, y) = k$$

$$k = xe^y$$

$$y = \ln_e\left(\frac{k}{x}\right)$$



5. 회전(Curl)정리

Q] 왜 ! 회전의 정리를 배우는가 ?

A] 임의의 폐곡선에서 자속밀도를 적분하면 그 폐곡선 내부를 통과하여 흐르는 전류의 크기와 같다는 암페어의 주회법칙(Ampere Circular law) $\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ 이 회전정리를 통하여 진화한다.

회전정리의 최종결과식은 다음과 같다.

$$\text{Curl } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{ds}$$

회전은 미소 폐곡선에서의 벡터 $\vec{H}$ 의 내적적분을 폐곡선으로 이루어진 면적(미소면적이 0 이 되는 극한을 취함)이 값으로 나눈 것을 의미한다.

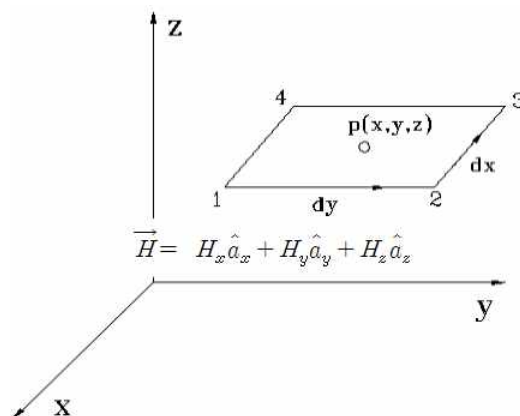
회전정리에 암페어 주회법칙을 적용하면 다음과 같은 암페어-회전정리가 유도된다.

$$(\nabla \times \vec{H})_n = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\oint_{s_n} \vec{H} \cdot d\vec{l}}{ds_n} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{I}{ds_n} = j_n$$

폐곡선을 구성하는 미소면적의 크기가 0으로 접근하면 면적내부에 존재하는 전류 I 의 크기는 전류밀도 j_s 가 된다. 여기서, n 은 폐곡선으로 만들어지는 면의 법선방향을 의미한다.

➡ 회전 정리 유도

회전은 미소 폐곡선에서의 벡터 $\vec{H}$ 의 내적을 폐곡선으로 만들어지는 미소 면적(미소면적이 0 이 되는 극한을 취함)의 크기로 나눈 것을 의미한다. 회전의 정리를 유도하면 다음과 같다.



임의의 한점 $p(x, y, z)$ 에서 벡터 $\vec{H}$ 가 다음과 같이 표현된다고 가정하자.

$$\vec{H} = H_x \hat{a}_x + H_y \hat{a}_y + H_z \hat{a}_z \quad (1)$$

한점 $p(x,y,z)$ 를 중심으로 하고 한 변의 길이가 dx , dy 인 그림과 같은 미소 정육각형에서 회전(Curl)의 개념을 유도하면 다음과 같다.

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = (\vec{H} \cdot d\vec{l})_{1-2} + (\vec{H} \cdot d\vec{l})_{2-3} + (\vec{H} \cdot d\vec{l})_{3-4} + (\vec{H} \cdot d\vec{l})_{4-1} \quad (2)$$

먼저, $+y$ 방향의 $(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{1-2}$ 을 계산하기 위하여 $+y$ 방향의 $d\vec{l}_{1-2}$ 선적분 구간에서의 벡터의 $+y$ 성분이 $H_{y,1-2}$ 로 일정하다고 가정하면 다음과 같이 계산된다.

$$(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{1-2} \cong H_{y,1-2} * dy \quad (3)$$

여기서 $H_{y,1-2}$ 는 고차항을 무시하고 테일러(Taylor) 급수를 적용하면 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} H_{y,1-2} &\cong H_y + \left(H_y \text{의 } x \text{에 대한 변화율} \times \left(\frac{dx}{2} \right) \right) \\ H_{y,1-2} &\cong H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \left(\frac{dx}{2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

결과적으로 $(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{1-2}$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{1-2} \cong \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) * dy \quad (5)$$

동일한 방법으로 $-y$ 방향의 $(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{3-4}$ 을 계산하면

$$(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{3-4} \cong H_{y,3-4} * (-)dy \quad (6)$$

여기서, $\vec{H}_{y,3-4}$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} H_{y,3-4} &\cong H_y + \left(H_y \text{의 } x \text{에 대한 변화율} \times \left(-\frac{dx}{2} \right) \right) \\ H_{y,3-4} &\cong H_y - \frac{\partial H_y}{\partial x} \left(\frac{dx}{2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

그러므로 $(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{3-4}$ 는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{3-4} \cong - \left(H_y - \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \quad (8)$$

동일한 방법으로 $-x$ 방향의 $(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{2-3}$ 을 계산하면 다음과 같다.

$$(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{2-3} \cong H_{x,2-3} * (-)dx \quad (9)$$

여기서, $(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{2-3}$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} H_{x,2-3} &\cong H_x + \left(H_x \text{의 } y \text{에 대한 변화율} \times \left(\frac{dy}{2} \right) \right) \\ H_{x,2-3} &\cong H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} \left(\frac{dy}{2} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

그러므로

$$(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{2-3} \cong - \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) * dx \quad (11)$$

마지막으로 $+x$ 방향의 $(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{4-1}$ 을 정리하면 다음과 같다.

$$(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{4-1} \cong H_{x,4-1} * dx \quad (12)$$

그러므로 $(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{4-1}$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} H_{x,4-1} &\cong H_x + \left(H_x \text{의 } y \text{에 대한 변화율} \times \left(-\frac{dy}{2} \right) \right) \\ H_{x,4-1} &\cong H_x - \frac{\partial H_x}{\partial y} \left(\frac{dy}{2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

그러므로

$$(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{4-1} \cong \left(H_x - \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) * dx \quad (14)$$

그러므로 식(2)에 대한 적분결과를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} &= (\vec{H} \cdot d\vec{l})_{1-2} + (\vec{H} \cdot d\vec{l})_{2-3} + (\vec{H} \cdot d\vec{l})_{3-4} + (\vec{H} \cdot d\vec{l})_{4-1} \\ &\cong \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) * dy - \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) * dx - \left(H_y - \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) * dy + \left(H_x - \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) * dx \\ &\cong 2 * \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} * \frac{dx}{2} * dy \right) - 2 * \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} * \frac{dy}{2} * dx \right) \\ \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} &\cong \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) * dxdy \end{aligned} \quad (15)$$

계산의 정확도를 높이기 위하여 미소면적에 대한 극한을 취하면 다음과 같다.

$$\lim_{dx, dy \rightarrow 0} \frac{\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l}}{dxdy} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (16)$$

다음으로 델(Del) 미분 연산자를 이용하면 표현하면 다음과 같다.

$$Curl \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{ds} \quad (17)$$

암페어 주회법칙 $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ 에서 미소면적을 0으로 만드는 극한을 취하면 전류밀도가 된다. 즉, 회전정리를 적용하면 $+z$ 방향을 향하는 전류밀도 j_z 의 값이 구해진다. 3차원 형상에서 전류밀도는 3개의 성분 j_x, j_y, j_z 가 존재한다. 3차원에 대한 일반식으로 회전정리를 표현하면 다음과 같다.

$$(\nabla \times \vec{H})_n = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{ds_n} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{I}{ds_n} = j_n \quad (18)$$

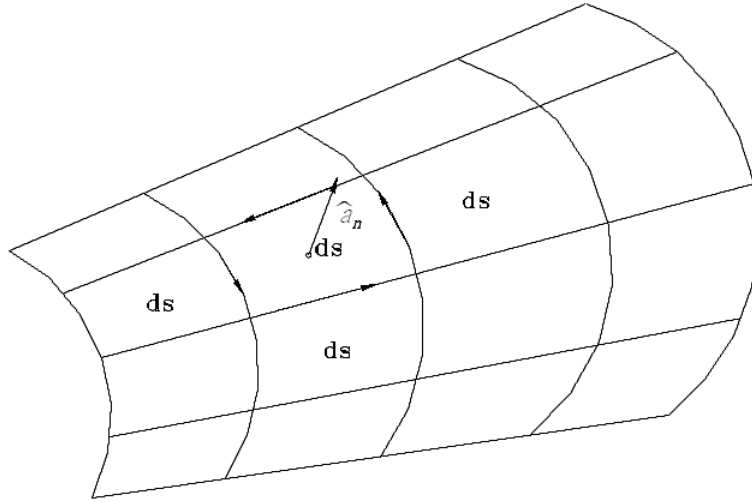
여기서, n 은 폐곡선으로 만들어지는 면의 법선방향을 의미한다. 직교좌표에 대한 회전정리를 정리하면 다음과 같다.

$$Curl \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \hat{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \hat{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{a}_z \quad (19)$$

회전 정리는 다음과 같은 행렬식의 형태로도 표현이 가능하다.

$$Curl \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (20)$$

6. 스톡스(Stokes)의 정리



그림과 같은 해석표면 ds 에 대하여 회전(Curl)의 정리를 적용하면,

$$\frac{\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l}_{ds}}{ds_n} \doteq (\nabla \times \vec{H})_n \quad (1)$$

여기서 $d\vec{l}_{ds}$ 는 표면 ds 의 경계선을 나타낸다.

$$\frac{\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l}_{ds}}{ds_n} \doteq (\nabla \times \vec{H}) \cdot \hat{a}_n \quad (2)$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l}_{ds} \doteq (\nabla \times \vec{H}) \cdot \hat{a}_n ds = (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} \quad (3)$$

결과적으로 식(1)은 식(4)와 같은 형태로 변환된다.

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} \quad (4)$$

스톡스(Stokes)의 정리는 임의의 해석영역에서의 회전에 대한 면적 적분을 해석영역 경계에서의 폐곡선 내적 적분으로 계산할 수 있다는 특징을 가진다.

7. 맥스웰 방정식(Maxwell Equation)의 정리

전기장과 관련된 맥스웰 방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q = \int_v \rho dv \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2)$$

다음으로 자기장과 관련된 맥스웰 방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}, \quad \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = I \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (4)$$

1. 식 (1)의 설명

패러데이(Faraday)의 실험결과 : 두개의 대전된 구 사이에 있는 어떤 가상의 구 표면을 통과하는 전속은 가상의 구표면 내부에 존재하는 총 전하와 같다.

가우스(Gauss 법칙) : 어떤 임의의 폐곡면을 통과하는 전속은 이 폐곡면 내부에 존재하는 전체 전하량과 같다.

가우스의 법칙과 발산정리를 이용하면 전기장에 대한 맥스웰 방정식이 유도된다.

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \quad (5)$$

$$\int_v (\nabla \cdot \vec{D}) dv = \int_v \rho dv \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (7)$$

2. 식(2)의 설명

단위 전하를 임의의 폐경로를 따라 일주시킬 때 필요한 일은 0이다.

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (8)$$

3. 식(3)의 설명

비오-사바르(Biot-Savart)의 법칙의 미분형 : 미소전류소를 구현할 수 없으므로 실험적인 확인 불가능하지만 다음과 같이 표현된다.

$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{l} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2} \quad (9)$$

그러나 다음과 같은 Biot-Savart의 법칙의 적분형은 실험적으로 증명이 가능하다.

$$\vec{H} = \oint_l \frac{I d\vec{l} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2} \quad (10)$$

암페어(Ampere)의 주회법칙 : 임의의 폐경로 위에서 자속 벡터 $\vec{H}$ 에 대한 선적분은 폐경로 내부를 통과하는 전류의 크기와 같다. 이 법칙은 Biot-Savart의 법칙으로부터 유도 가능하다.

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (11)$$

폐경로가 x-y평면에 평행하게 놓일 경우, z방향의 전류밀도의 크기는 다음과 같다.

$$\lim_{dx, dy \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{dxdy} \cong \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \cong J_z \quad (12)$$

폐경로가 y-z평면에 평행하게 놓일 경우, x방향의 전류밀도의 크기는 다음과 같다.

$$\lim_{dy, dz \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{dydz} \cong \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \cong J_x \quad (13)$$

폐경로가 z-x평면에 평행하게 놓일 경우, y방향의 전류밀도의 크기는 다음과 같다.

$$\lim_{dz, dx \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{dzdx} \cong \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \cong J_y \quad (14)$$

스토크스(Stokes) 정리를 이용하여 정리하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_s (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} \\ \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} &= I = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_s (J_x \hat{a}_x + J_y \hat{a}_y + J_z \hat{a}_z) \cdot d\vec{s} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} = J_x \hat{a}_x + J_y \hat{a}_y + J_z \hat{a}_z \end{aligned} \quad (15)$$

4. 식(4)의 설명

자기장에 대한 가우스(Gauss)의 법칙 : 자속선은 항상 폐곡선을 형성하며 점전하와 같이 형태의 독립된 자하가 존재하지 않는다.

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (16)$$

8. 포아송(Poisson), 라플라스(Laplace) 방정식 유도

전기장과 관련된 맥스웰 방정식의 미분형과 적분형은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_v \rho \, dv \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2)$$

전기장과 관련된 보조방정식으로는 다음과 같다.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{E} = -\nabla V \quad (3)$$

위의 식들을 이용하여 전기장에 대한 포아송 방정식(Poisson's equation)을 유도하면 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = \rho \quad (4)$$

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = \rho \quad (5)$$

ϵ 의 값이 상수라 가정하면, 다음과 같은 포아송방정식이 유도된다.

$$\nabla \cdot (\nabla V) \equiv \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (6)$$

만약에 해석영역에서의 전하밀도 ρ 가 0인 경우, 다음과 같다.

$$\nabla \cdot (\nabla V) \equiv \nabla^2 V = 0 \quad (7)$$

위의 식 (7)을 라플라스 방정식(Laplace's equation) 이라 한다.

시간에 따라 전기장이 변하는 시변전장(time-varying electric field)의 경우에 맥스웰방정식을 유도하면 다음과 같다.

시변전장의 경우는 패러데이(Faraday)의 실험법칙에서 출발한다.

$$emf = V = -\frac{d\phi}{dt} \quad (8)$$

$$-\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (9)$$

$$\int_s (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (10)$$

$$\int_s (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = -\int_s \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) \cdot d\vec{s} \quad (11)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (12)$$

다음으로 자기장과 관련된 맥스웰 방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (13)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}, \quad \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (14)$$

자기장에 관련된 보조방정식은 다음과 같다.

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (15)$$

위의 식들을 이용하여 자기장에 대한 포아송 방정식(Poisson's equation) 유도하면 다음과 같다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \vec{B} = \vec{J} \quad (16)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu \vec{J} \quad (17)$$

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} \quad (18)$$

벡터 포텐셜 $\vec{A}$ 에 대해서 다음과 같은 조건을 부여할 수 있다.

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad : \text{쿨롱조건(Coulomb Condition)} \quad (19)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad : \text{로렌쯔조건(Lorentz Condition)} \quad (20)$$

쿨롱조건(Coulomb Condition)을 적용하면

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} &= -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 A_x &= -\mu J_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu J_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu J_z \end{aligned} \quad (21)$$

시간에 따라 변하는 시변자장(time-varying magnetic field)의 경우 맥스웰 방정식을 유도하면 다음과 같다.

먼저 전류연속방정식(체적 v 를 통과하는 전류는 체적내의 전하량 감소분과 같다.)을 유도하면 다음과 같다

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial Q}{\partial t} \quad (22)$$

$$\int_v (\nabla \cdot \vec{J}) dv = -\frac{d}{dt} \int \rho dv \quad (23)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (24)$$

다음으로 변위전류항에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (25)$$

벡터항등식과 전류연속방정식을 이용하면 등호가 성립하지 않음을 알 수 있다.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) \equiv 0 \neq \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (26)$$

수식을 만족시키는 임의의 벡터 $\vec{G}$ 를 도입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot (\vec{J} + \vec{G}) \quad (27)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \vec{G} \quad (28)$$

벡터항등식 [$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) \equiv 0$]을 적용하면 식(28)의 우변은 다음을 만족하여야 한다.

$$\nabla \cdot \vec{G} = -\nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{D}) \quad (29)$$

그러므로 임의의 벡터 $\vec{G}$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\vec{G} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (30)$$

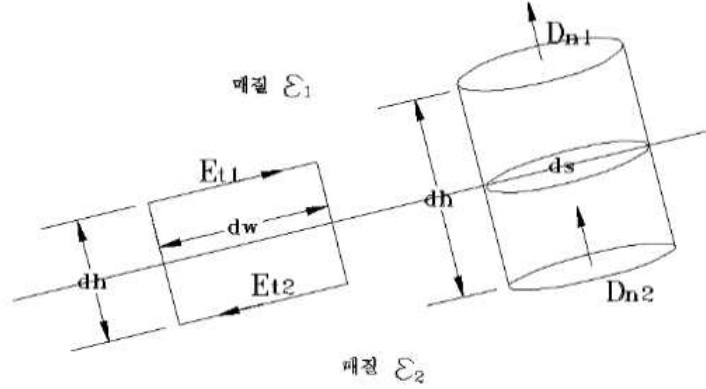
결과적으로 시변자기장에 대한 맥스웰 방정식은 다음과 같이 정리된다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (31)$$

여기서 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 는 변위전류라고 한다.

9. 경계조건

전기장에서의 경계조건은 다음과 같이 정리된다.



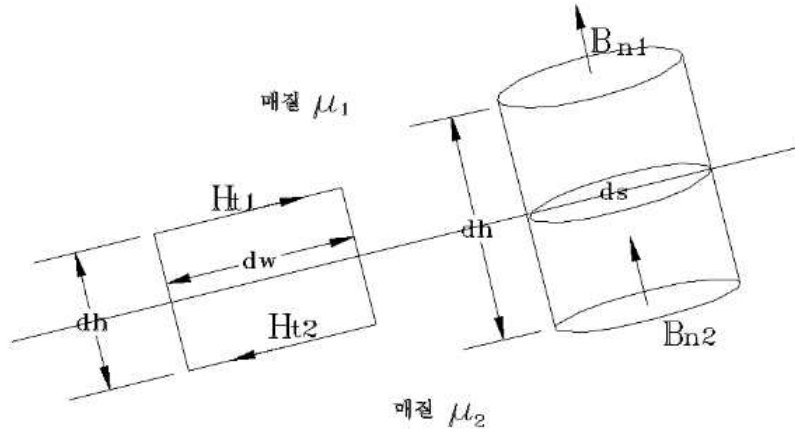
경계면에서의 연속조건을 정리하기 위하여 높이 dh 를 0으로 만드는 극한 $\lim_{dh \rightarrow 0}$ 를 적용하면서 회전정리와 발산정리를 적용하면 다음과 같이 경계조건이 정리된다.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1)$$

$$E_{t1}dw - E_{t2}dw = 0 \quad D_{n1}ds - D_{n2}ds = \rho ds \quad (2)$$

$$E_{t1} = E_{t2} \quad D_{n1} = E_{n2} \quad (3)$$

자기장에서의 경계조건은 다음과 같이 정리된다.



전기장의 경우와 동일한 방법으로 높이 dh 를 0으로 만드는 극한 $\lim_{dh \rightarrow 0}$ 를 적용하면서 회전정리와 발산정리를 적용하면 다음과 같이 경계조건이 정리된다.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (4)$$

$$H_{t_1}dw - H_{t_2}dw = Kdw \qquad B_{n_1}ds - B_{n_2}ds = 0 \qquad (5)$$

$$H_{t_1} - H_{t_2} = K \qquad B_{n_1} = B_{n_2} \qquad (6)$$